

芸術的な高校入試第99回

難易度：★×8

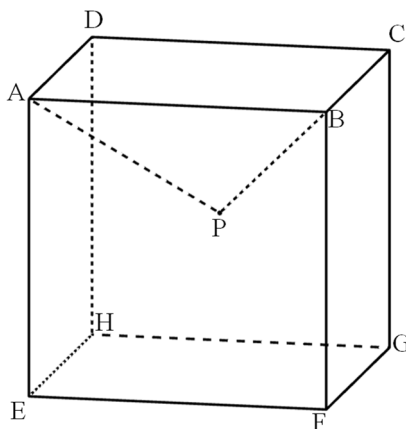
美しさ：★×9

得点

/25

出典：2023 年度 国立高校

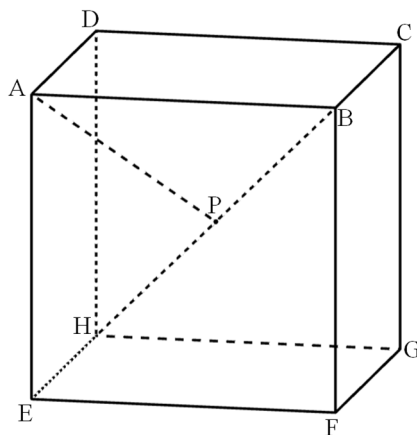
右図に示した立体 $ABCD-EFGH$ は、1 辺の長さが 3 cm の立方体である。点 P は、この立方体の内部および全ての面、全ての辺上を動く点である。 $AP=a$ cm, $BP=b$ cm とする。次の各問に答えよ。ただし、円周率は π とする。



問 1 点 P が $a=b=3$ を満たしながら動くとき、点 P はある曲線上を動く。点 P が動いてできる曲線の長さは何 cm か。

問 2 点 P が線分 DF 上にあるとする。 $a+b$ の値が最も小さくなるとき、立体 $P-ADE$ の体積は何 cm^3 か。ただし、答えだけでなく、答えを求める過程が分かるように、図や途中の式などもかけ。

問 3 右図は、右上図において、 $a \geq b$ のとき頂点 H と点 P を結んだ場合を表している。 $HP=c$ cm とし、点 P が $b=c$ を満たしながら動くとき、点 P はある多角形の辺上および内部を動く。点 P が動いてできる多角形の面積は何 cm^2 か。



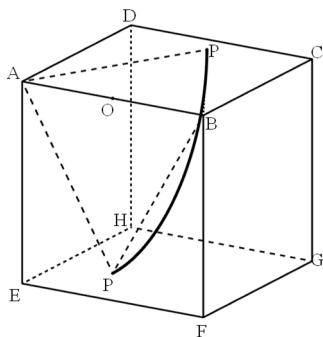
【ヒント】

全体的にあまり真面目に考えない方が良い（合格することだけを考えるなら）。都合よい点だけ考えると良い。解答例は見ないようにしましょう，一旦自分で考えてみて。

【略解】

問 1 : $\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi$ cm, 問 2 : $\frac{9}{4}$ cm³, 問 3 : $\frac{27\sqrt{3}}{8}$ cm²

問 1 (7 点)



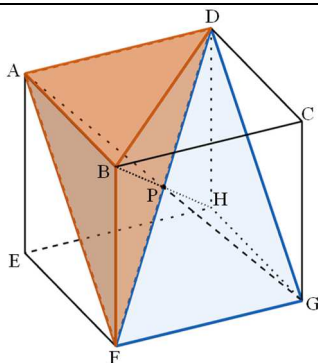
この正三角形を、 AB を軸として回転させたときの点 P の軌跡を考えればよい。 AB の中点を O とすると、点 O を中心とし、半径 OP の円周（扇形の弧）上を動くことが分かる。

$$\text{OP} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{なので, } \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \pi \text{ cm}$$

問 2 (10 点)

国立高校を受験するくらいのレベルなら、瞬時に「DF の中点に点 P があるな」と判断できる。ただ、その理由を説明となると、少し悩む（説明なかったら 0 点です）。実は物凄く典型的な問題。余計なことを考えない。

三角錐 F-ABD において、P は辺 DF 上の点で、 $BP+PA$ を最小にする点なので、三角錐 F-ABD の展開図（のうち、 $\triangle ADF$ と $\triangle BDF$ ）を書き、線分 AB と線分 DF との交点を P とすればよい。展開図において、四角形 ADBF は長方形となる（ $\triangle DFB \equiv \triangle DFG$ より）ので、点 P は DF の中点である。



よって P から底面 ADE におろした垂線の長さは $\frac{3}{2}$ cm

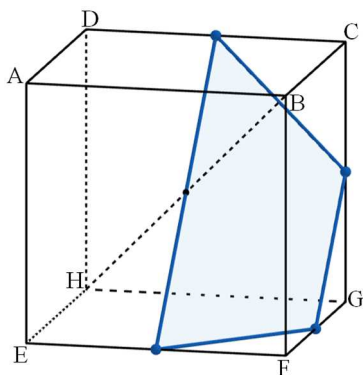
$$\triangle ADE = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} \text{ cm}^2$$

以上から、求める体積は $\frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \text{ cm}^3$

問3 (8点)

Point あまり真面目に考えない

(答えを出すことだけを考えるなら) 辺上で $HP=BP$ となる点だけ考えれば、問題文に「多角形になる」と書いてあるのでそれだけで解ける。



立方体の辺上で $BP=HP$ となる点を考えると、DC, EF, FG, CG の中点となる。

(AD, AE の中点でも $BP=HP$ となるが、 $a \geq b$ を満たさなくなる)(立方体の半分より左側だと $a \leq b$)

何と、この4点を結んでできる四角形の面積を求めれば良いだけなのである。

AD, AE の中点も結ぶと分かるが、求める面積は、よく立方体切断で出てくる正六角形の面積の半分となる。

1 辺 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ cm の正三角形3つ分の面積だから、

$$3 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \sqrt{2} \times \frac{3}{4} \sqrt{6} = \frac{27\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2$$

【コメント】

河合塾の講評で、問2・3は「D 超難問」となっていました。計算自体は苦じゃないのですが、とにかく思いつくのがしんどいですね。

問2はよく見たら典型問題です。正答率は低いでしょうけど。

類題：2022 年度八王子東 <https://hokkaimath.jp/blog-entry-337.html>

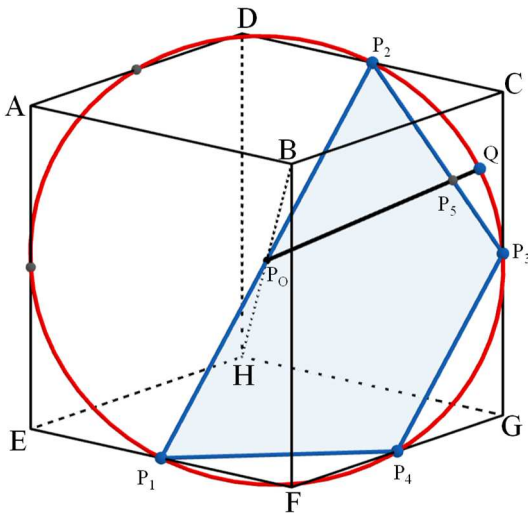
問3は「垂直二等分線がどうのこうの……」とか考えると泥沼です。ちよっと単純に考えられた人間の勝利ですね。求める面積は問題集で何度も見たことあるだけに、解説読んだら超悔しい。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>

Q, 問3 何故ああなる？

$HP=BP$ なので、 HB の中点を P とする。

$HP=BP$ を満たしながら点 P を動かすとき、点 P は HB の垂直二等分線上を動く。平面だったら楽勝瞬殺だが、**この問題はこれを空間で考えなくてはならない。**



BH の中点を P_0 , EF の中点を P_1 , CD の中点を P_2 とすると、 P_1P_2 は線分 BH の垂直二等分線である。

$P_1P_2 \perp HB$ を満たしながら線分 P_1P_2 を動かせばよいので、線分 P_1P_2 が動いてできる図形は、左図のような赤い円となる（直線 P_1P_2 を動かすと、赤い円と重なる平面となる、たぶん分かりやすいだろうから赤い円にしている）。

この赤い円は、 CG の中点 P_3 , FG の中点 P_4 も通っている。

円周上に適当に点 Q をとり、立方体の面との交点を P_5 とすると、確かに P_5 は、四角形 $P_1P_2P_3P_4$ の边上の点となる。

これで説明良いだろうか。もっと良い説明あったら教えてください。

【GeoGebra】

問1：<https://www.geogebra.org/3d/hert8kvj>

問2：<https://www.geogebra.org/3d/rephcrua>

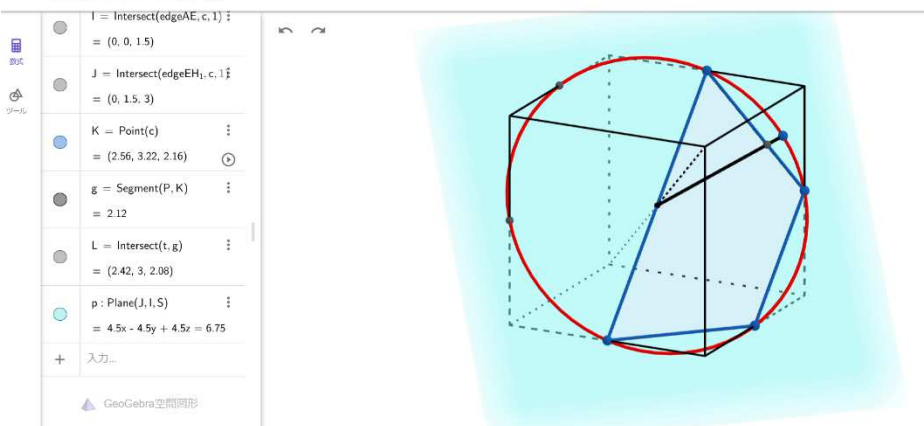
問3：<https://www.geogebra.org/3d/ewpflkma>

【納得いかない高校生以上用 ベクトル】

P が通る平面（水色のやつ）：<https://www.geogebra.org/3d/wmsccad>

GeoGebra を見るとこの平面の方程式が「 $4.5x - 4.5y + 4.5z = 6.75$ 」となっている。これを、ベクトルで確かめる。

≡ GeoGebra 空間図形



$$\overrightarrow{BA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BF} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{とすると,}$$

$$\overrightarrow{BP_0} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ とし, } \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x - \frac{3}{2} \\ y - \frac{3}{2} \\ z - \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BP_0} \perp \overrightarrow{P_0P} \text{ なので, } \overrightarrow{BP_0} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \text{ より,}$$

$$-\frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}\left(y - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(z - \frac{3}{2}\right) = 0, \quad \text{整理して, } x - y + z = \frac{3}{2},$$

両辺 4.5 倍すると確かに $4.5x - 4.5y + 4.5z = 6.75$ （何で GeoGebra はこんな表示なんだろう……）。スッキリしましたね！