

3つのサイコロと整数

範囲：確率と整数

難易度：★×4

得点

/11

出典：2021年度 成蹊高校

3つのさいころ A, B, C を同時に 1 回投げて出た目をそれぞれ a , b , c とする。次の各問いに答えよ。

- (1) 積 abc が素数となる確率を求めよ。
- (2) 積 abc が 1 桁の整数となる確率を求めよ

【解答例】

3つのさいころ A, B, C を同時に 1 回投げたときの目の通りは、
 $6^3=216$ 通りである。(※)

(1) (5 点)

素数とは、1 と自分自身以外約数を持たない 2 以上の自然数なので、 a, b, c のうち 2 つは 1 である必要がある。もう 1 つは、2, 3, 5 のいずれかとなる。

$(a, b, c) = (2, 1, 1) (1, 2, 1) (1, 1, 2)$
 $(3, 1, 1) (1, 3, 1) (1, 1, 3)$
 $(5, 1, 1) (1, 5, 1) (1, 1, 5)$ の 9 通りとなるから、

$$\frac{9}{216} = \frac{1}{24}$$

(2) (6 点)

abc が小さい数となるから、 a, b, c に 1 が入っているかで考える

I) a, b, c のうち 2 つが 1 のとき

$(a, b, c) = (1, 1, 1)$
 $(2, 1, 1) (1, 2, 1) (1, 1, 2)$
 \vdots
 $(6, 1, 1) (1, 6, 1) (1, 1, 6)$ の $1+3 \times 5=16$ 通り

II) a, b, c のうち 1 つが 1 のとき

2~6 で、積が 9 以下になる組み合わせは、 $(2, 2) (2, 3) (2, 4) (3, 3)$

$(a, b, c) = (1, 2, 2) \cdots (2, 2, 1)$ 3 通り
 $(1, 2, 3) (1, 3, 2) (2, 1, 3) (3, 1, 2) (2, 3, 1) (3, 2, 1)$ 6 通り
 $(1, 2, 4) \cdots (4, 2, 1)$ 6 通り
 $(1, 3, 3) \cdots (3, 3, 1)$ 3 通り 合計 18 通り

III) a, b, c のうち 1 つも 1 がいないとき

$(a, b, c) = (2, 2, 2)$ の 1 通りのみ

よって求める確率は、 $\frac{35}{216}$

(※) A の出目 6 通りに対して、B の出目 6 通りあるから、 $6 \times 6=36$ 通り
 36 通り各々に対して、C の出目は 6 通りあるから $36 \times 6=216$ 通りとなる。
 例えば、A~E の 5 個サイコロがあった場合は、 $6^5=7776$ 通りとなる。

【コメント】 解答例では真面目に長々と $(a, b, c) = \cdots$ と書いていますが、意味さえ分かれば素早く数えられますね。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>