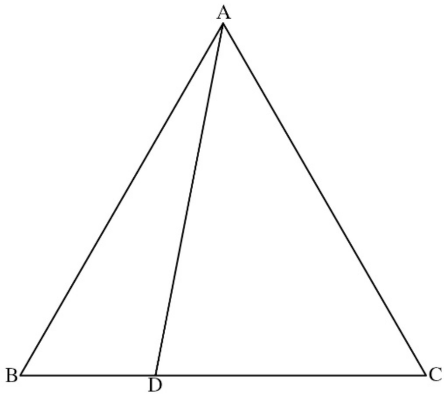
芸術的な高校入試第 42 回	
美しさ：★★★★★☆	難易度：★★★★☆☆

出典：2019 年度　愛知県 B

図で，△ABC は正三角形であり，D は辺 BC 上の点で，BD：DC＝1：2 である。AB＝6 cm のとき，次の①，②の問いに答えなさい。

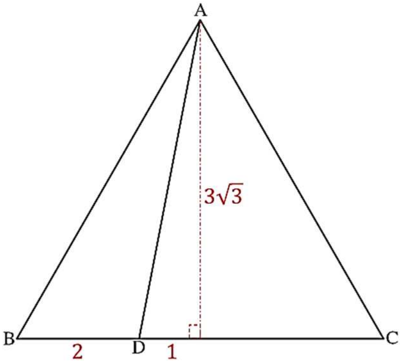


①　線分 AD の長さは何 cm か，求めなさい。

②　線分 AD を折り目として平面 ABD と平面 ADC が垂直となるように折り曲げたとき，点 A，B，C，D を頂点としてできる立体の体積は何 cm^3 か，求めなさい。

【解答例】

①（1 点）

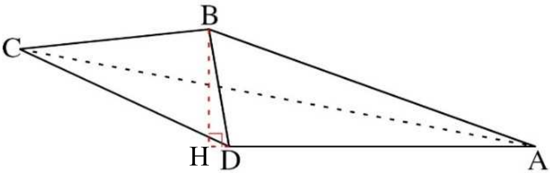


A から BC に垂線を下す。

$\mathrm{AD} = \sqrt{27+1} = \mathbf{2\sqrt{7}\ cm}$

②（1 点）

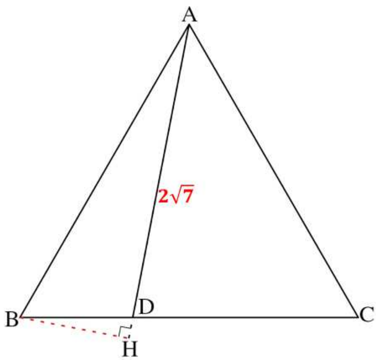
Point 平面 ABD⊥平面 ADC（∠BDC＝90°）だからって，
BD⊥平面 ADC ではない



三角すいとなる。
△ADC を底面とすると，高さは，点 B から直線 AD に下した垂線との交点を H とすると，高さは BH となる。

（BH⊥HA，BH⊥HC　より，BH⊥平面 AHC(ADC)）

$\triangle\mathrm{ADC} = \dfrac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} \times \dfrac{2}{3} = 6\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$　$\triangle\mathrm{ABD} = 3\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$ なので，



$\dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \times \mathrm{BH} = 3\sqrt{3}$　$\mathrm{BH} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

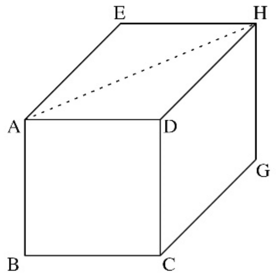
よって，求める体積は，

$\dfrac{1}{3} \times 6\sqrt{3} \times \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \mathbf{\dfrac{18\sqrt{7}}{7}\ cm^3}$

Point　直線と平面の垂直条件

平面上のどの直線とも垂直である必要がある。証明の際は，平面上の 2 直線と垂直であることを示せば良い。

Point 例えば



立方体 ABCD-EFGH がある。

平面 ABCD⊥平面 AEHD　ではあるが，

HA⊥平面 ABCD ではない。

（垂直な直線は，AB のみ）

EA⊥AD，EA⊥AB より，EA⊥平面 ABCD

などなど，自分なりに分かりやすい例で納得しておく。

【コメント】

①は典型的な問題，②は垂直条件（実は中 1 で習うやつ）について，深く考えることが出来る良問です。高校数学 A の図形分野，数学 B のベクトル分野でも効いてきます。たまにはこういうのも良いと思います。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/