

芸術的な高校入試第 43 回

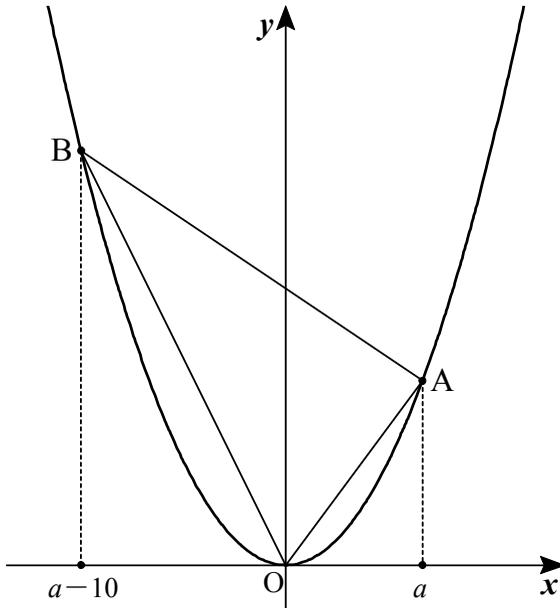
美しさ：★★★★☆

難易度：★★★★★

出典：1998 年度 筑波大学附属駒場中・高等学校 (高校入試)

大小 2 つのサイコロを同時に 1 回だけ投げて、出た目の数の和を a とします。さらに、関数 $y = x^2$ のグラフ上に、 x 座標が a 、 $a-10$ であるような 2 点 A 、 B をとります。

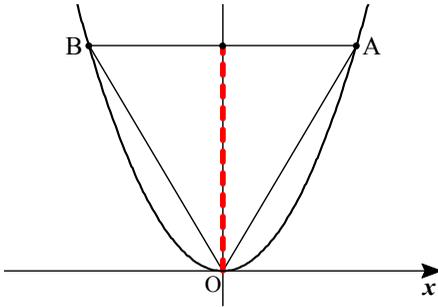
原点 O と A 、 B の 3 点を結んでできる図形について、次の問いに答えなさい。ただし、座標の 1 目盛りを 1 cm とします。 $y = x^2$



- (1) 図形が AB を底辺とする二等辺三角形となる確率を求めなさい。
- (2) 直線 AB の傾きを a を用いて表しなさい。また、直線 AB と y 軸との交点の y 座標を a を用いて表しなさい。
- (3) 図形の面積が 120 cm^2 となる確率を求めなさい。

【解答例】

(1)



$y = x^2$ のグラフは、 y 軸に関して対称なので、 $\triangle OAB$ が、 AB を底辺とする二等辺三角形になるには、線分 AB と y 軸が垂直に交わる必要がある。このとき、 x 座標の絶対値は等しいので、
 $a = 10 - a$ $2a = 10$ $a = 5$

出た目の和が 5 となるのは、(1, 4) (2, 3) (3, 2) (4, 1) の 4 通り。

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(2)

$$\text{傾き} = \frac{(a-10)^2 - a^2}{(a-10) - a} = \frac{(a-10+a)(a-10-a)}{-10} = 2a - 10$$

直線 AB は、点 $A(a, a^2)$ を通り、傾き $2a - 10$ なので、 $y - a^2 = (2a - 10)(x - a)$

$$y = (2a - 10)x - a^2 + 10a$$

よって、直線 AB と y 軸との交点の y 座標は、 $-a^2 + 10a$

※

$y = cx^2$ 上の点、 $A(a, ca^2)$ 、 $B(b, cb^2)$ の 2 点を通る直線の式の傾きは、

$$\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = \frac{ca^2 - cb^2}{a - b} = \frac{c(a^2 - b^2)}{a - b} = \frac{c(a+b)(a-b)}{a-b} = c(a+b)$$

比例定数 \times (2 点の x 座標の和) で求めることができる！

【作成】

(3)

I) $a < 10$ のとき (B の x 座標が負のとき)

直線 AB と y 軸との交点を C とすると、

$$\triangle OAB = \triangle OCA + \triangle OCB$$

$$= \frac{1}{2} \times (-a^2 + 10a) \times a + \frac{1}{2} \times (-a^2 + 10a) \times (10 - a)$$

$$= \frac{1}{2} (-a^2 + 10a) \times 10 = -5a^2 + 50a$$

$$-5a^2 + 50a = 120 \text{ とすると, } a^2 - 10a + 24 = 0 \quad (a - 4)(a - 6) = 0$$

$a < 10$ より, $a = 4, 6$

$a = 4$ となるのは, (1, 3) (2, 2) (3, 1) 3 通り

$a = 6$ となるのは, (1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1) 5 通り

II) $a = 10$ のとき, $\triangle OAB$ はできない。

III) $a > 10$ のとき (B の x 座標が正のとき)

$$\triangle OAB = \triangle OCA - \triangle OCB$$

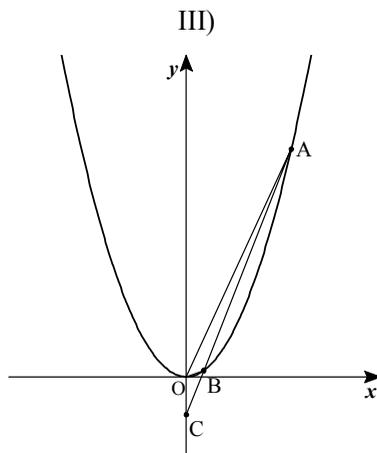
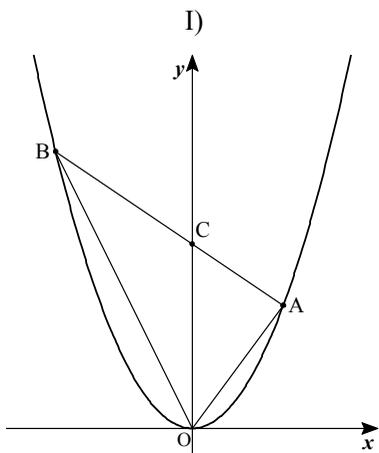
$$\frac{1}{2} \times (a^2 - 10a) \times 10 = 5a^2 - 50a$$

$$5a^2 - 50a = 120 \text{ とすると, } a^2 - 10a - 24 = 0 \quad (a - 12)(a + 2) = 0$$

$a > 10$ より, $a = 12$ $a = 12$ となるのは, (6, 6) 1 通り

よって合計 9 通りなので, 求める確率は $\frac{1}{4}$

【作成】



※

面積を求める際に、クロスチョップ（サラスの公式）を使うと……

$A(a, a^2), B((a-10), (a-10)^2)$ となるから

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \frac{1}{2} |a(a-10)^2 - a^2(a-10)| = \frac{1}{2} |a(a-10)((a-10)-a)| \\ &= \frac{1}{2} |-10a(a-10)| = 5|-a^2 + 10a| \end{aligned}$$

となり、 $a \leq 10$ のとき、 $-5a^2 + 50a$ $a \geq 10$ のとき、 $5a^2 - 50a$

【コメント】

サイコロ2つなので、 $2 \leq a \leq 12$ 、この $a=11, 12$ のせいで、問題がややこしくなっています。

塾などでは、裏技としてサラスの公式を教えています。それを使わない意思を感じます。良問。

【作成】

高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>