

芸術的な高校入試第 44 回

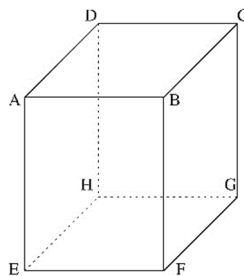
美しさ：★★★★★★+

難易度：★★★★☆☆

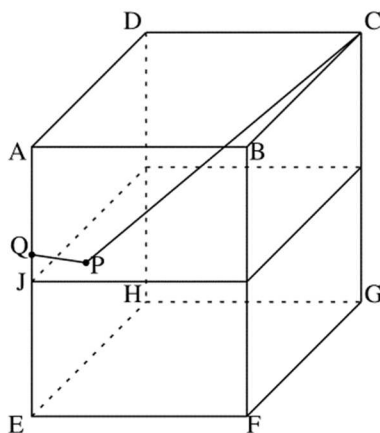
出典：2020 年度 東京都立 立川高校

右の図 1 に示した立体 $ABCD-EFGH$ は、 $AB=40$ cm、 $AD=30$ cm、 $AE=50$ cm の直方体である。 次の各問に答えよ。 図 1

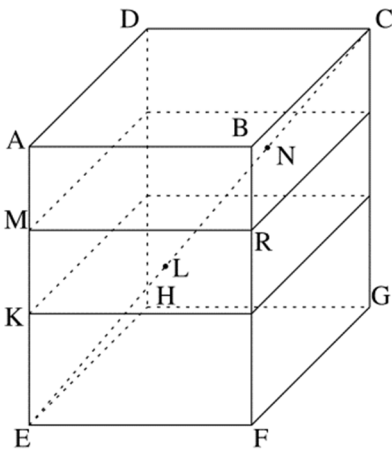
問 1 図 1 において、頂点 D と頂点 F を結び、頂点 B から線分 DF に引いた垂線と線分 DF との交点を I とする。線分 BI の長さは何 cm か。



問 2 右の図 2 は、図 1 において、辺 AE 上に $AJ=25$ cm となるように点 J をとり、点 J を通り、面 $ABCD$ に平行な平面上の点を P とし、辺 AE 上に $AQ=20$ cm となるように点 Q をとり、頂点 C と点 P 、点 P と点 Q をそれぞれ結んだ場合を表している。ただし、点 P は立体 $ABCD-EFGH$ の内部にある。 $CP+PQ=l$ cm とする。 l の値が最も小さくなる場合の l の値を求めよ。 図 2



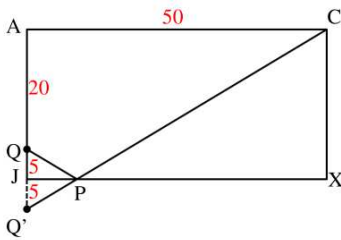
問 3 右の図3は、図1において、頂点Cと頂点Eを結び、辺AE上にAK=30 cmとなるように点Kをとり、点Kを通り、面ABCDに平行な平面と線分CEとの交点をLとし、辺AE上にAM=15 cmとなるように点Mをとり、点Mを通り、面ABCDに平行な平面と線分CEとの交点をNとし、点Mを通り、面ABCDに平行な平面と辺BFとの交点をRとした場合を表している。点Rと点L、点Rと点M、点Rと点N、点Lと点M、点Mと点Nをそれぞれ結んでできる立体LMNRの体積は何 cm^3 か。ただし、答えだけでなく、答えを求める過程が分かるように、途中の式や計算なども書け。 図3



【解答例】**問 1 (7 点)**

$\triangle DBF$ において、 $DB = \sqrt{900 + 1600} = 50 \text{ cm}$ 、平面 $ABFE \perp$ 平面 ABC だから、 $\angle DBF = 90^\circ$ 、また $BF = 50 \text{ cm}$ なので、 $\triangle DBF$ は直角二等辺三角形となる。よって $\triangle DIB$ も直角二等辺三角形となるから、

$$BI = \frac{50}{\sqrt{2}} = 25\sqrt{2} \text{ cm}$$

問 2 (7 点)

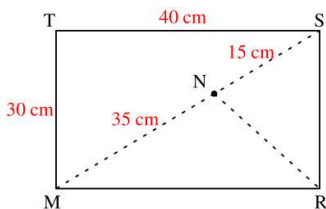
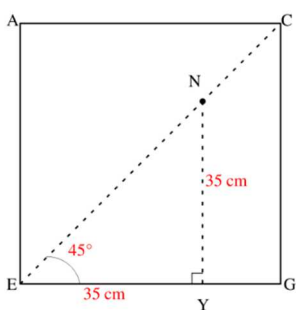
(1) と同様に $AC = 50 \text{ cm}$ 。点 J を通り、面 $ABCD$ に平行な平面と、 CG との交点を X とする。 JX に関して、点 Q と線対称な点を Q' とする。すると、点 P の位置は、 $Q'C$ と JX となり、この $Q'C$ が最短距離となる。

よって、 $l = 10\sqrt{9 + 25} = 10\sqrt{34} \text{ cm}$

【作成】

高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>

問3 (11点)



立体 LMNR は三角錐 L-MNR で、 $\triangle MNR$ を底面とすると、高さは MK (= 15 cm) となる。
 $AC = 10\sqrt{9 + 16} = 50$ cm より、四角形 ACEG は 1 辺が 50 cm の正方形である。左図のように、点 N から EG に垂線 NY を下すと、その長さは $50 - 15 = 35$ cm、 $\angle CEG = 45^\circ$ より、 $EY = 35$ cm となるので、 $MN = 35$ cm となる。

3 点 M, N, R を含む平面を、左図のように、長方形 MRST で考える。

$$\triangle MRS = \frac{1}{2} \times 30 \times 40 = 600 \text{ cm}^2 \quad \text{よって、}$$

$$\triangle MNR = 600 \times \frac{35}{50} = 420 \text{ cm}^2 \quad \text{となる。}$$

したがって、立体 LMNR の体積は、 $\frac{1}{3} \times 420 \times 15 = \mathbf{2100 \text{ cm}^3}$

【コメント】

AC の長さだけ三平方の定理をしますが、これさえ与えてあげれば、問1…中3平方根を習った後、問3…中1終わった後ぐらい、に解ける問題となります（簡単という意味ではない）。立川は凝った大問4（空間図形、整数問題）が、実は中1でも解けるというパターンが多い気がします。

とにかく解いていて楽しい問題ですね。計算が面倒でなく、いかに普段から真剣に勉強をしているかが問われます。本当問題作るのが上手だと思います。適度に難しいので、適度に差もつくでしょう。

問3、立川の模範解答は文字ばかり書いていますが、大変なので、図を用いて解答を書いた方が良いでしょう。

【作成】