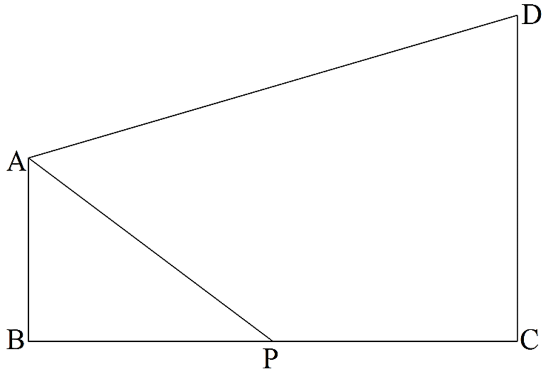
芸術的な高校入試第 4 回	
美しさ：★★★★★★★+	難易度：★★★★★★★+

出典：2010 年度　東京都立　新宿高校

下の図のように，AB＜DC，∠ABC＝∠BCD＝90°の台形があります。∠BAD の二等分線が，線分 BC と交わるとき，交点を P とします。次の問いに答えなさい。



問 1　AB＋DC＝AD とします。

（1）点 P は辺 BC の中点であることを証明しなさい。

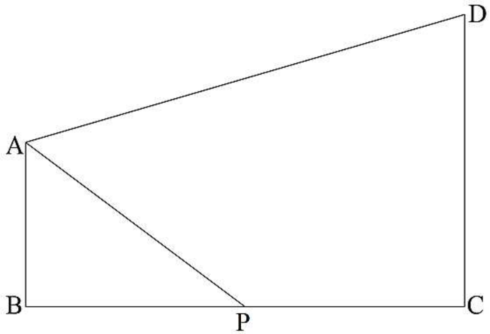
（2）AB＝4 cm，DC＝9 cm のとき，線分 AP の長さを求めなさい。

問 2　点 P から辺 AD に平行な直線を引き，辺 DC との交点を Q とします。

（1）点 Q を，定規とコンパスを用いて作図しなさい。ただし，作図に用いた線は消さないでおくこと。

（2）AB＝4 cm，DC＝9 cm，BP：PC＝2：3 のとき，線分 CQ の長さを求めなさい。

<問 2（1）用>



【コメント1】

基本的に都立入試の証明は，図の複雑さで難易度を上げています。ただ，複雑な方が，証明しやすかったりします。

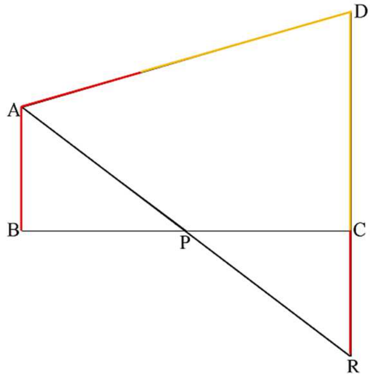
図が単純だと要注意です。これは問 1（1），問 2（1）が出来れば，他も簡単ですが，逆に言えばこれらが出来なかったら厳しい戦いを強いられます。AB＋DC＝AD という条件がわざとらしいですが，何となく AB，DC を半径とする円が見えなくも……？（解答例 2）

【解答例】

問 1

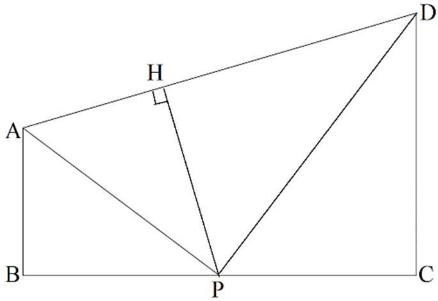
（1）（8 点）

（解答例 1　本来の解答）



直線 AP と直線 DC の交点を R とする。
△ABP と△RCP において，仮定より，∠ABP＝∠RCP＝90°…①
AB//DR より，平行線の錯角は等しいから，∠BAP＝∠CRP…②
AP は∠BAD の二等分線なので，∠BAP＝∠DAP…③
②，③より，∠DAP＝∠CRP と，2 つの角が等しいから，
△DAR は AD＝RD の二等辺三角形である。仮定より，AD＝AB＋DC　また，RD＝RC＋CD であるから，AB＝RC…④
①，②，④より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，
△ABP≡△RCP
したがって，BP＝CP であるから，点 P は辺 BC の中点である。

（解答例 2）



点 P から辺 AD に垂線を下ろし交点を H とする。
△ABP と△AHP において，仮定より，
∠ABP＝∠AHP＝90° …①　∠BAP＝∠HAP…②
共通な辺だから，AP＝AP…③
①～③より，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから，
△ABP≡△AHP　したがって，BP＝HP…④，AB＝AH
△DHP と△DCP において，
AD＝AB＋DC＝AH＋DH より，DH＝DC…⑤
仮定より，∠DHP＝∠DCP＝90° …⑥
共通な辺だから，DP＝DP…⑦
⑤，⑥，⑦より直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから
△DHP≡△DCP　したがって，HP＝CP…⑧
④，⑧より，BP＝CP だから，点 P は，辺 BC の中点となる。

（2）（5 点）

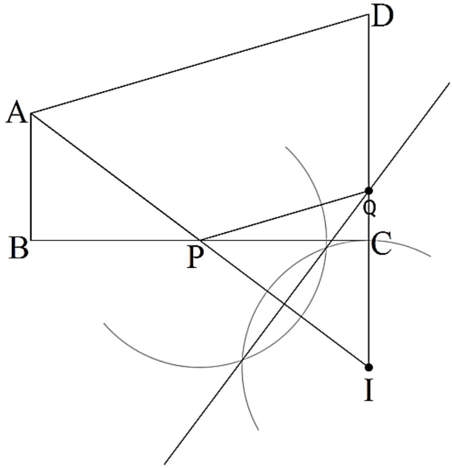
AP＝x とする。

∠APB＝∠APH＝a° ，∠DPH＝∠DCP＝b° とすると，

$2a+2b=180°$ より，$a+b=90°$ したがって，△APD∽△ABP であるから，

$x:4=13:x$　$x^2=52$　$x=2\sqrt{13}$　**$2\sqrt{13}$ cm**

問２
（1）（5 点）



AD//PQ をどうにかして使えないか考える。平行線と線分の比を使いやすくするために，AP，DC を延長し，交点を I とする。∠BAP＝∠DAP，∠BAP＝∠QIP，∠DAP＝∠QPI だから，∠QIP＝∠QPI となり，△QPI は二等辺三角形となる。よって，PI の垂直二等分線を引けば Q が求まる。

（2）（5 点）
△ABP∽△ICP，相似比 2：3 より，CI＝6 cm
DC＝9 cm より，DI＝15 cm
AP : IP＝2 : 3 だから，平行線と線分の比より，DQ : QI＝2 : 3 となるので，
DQ＝6 cm，QI＝9 cm
QC＝QI－CI＝**3 cm**

【コメント2】

シンプルな図ですが結構良い難易度していますね。(1) さえ解ければ (2) は余裕です。先に（2）を解こうとして「どう補助線を引こうかな？」と考えたら，逆に（1）が解けるかもしれません。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/