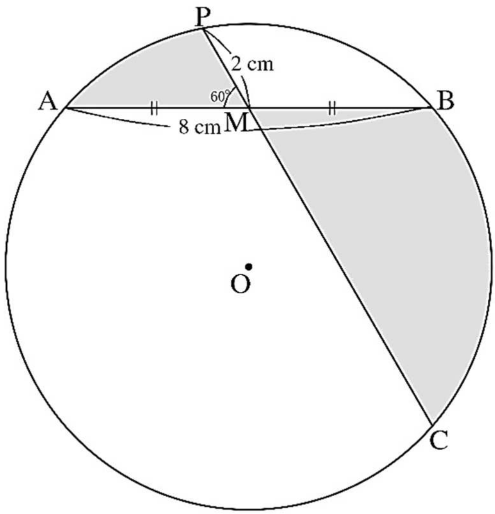
分解して面積の難問		
範囲：中 3 図形	難易度：★★★★★	得点　　　　　　/5

出典：2005 年度　宮城県　改題

下の図のように，長さが 8 cm の線分 AB があり，その中点を M とします。線分 AB 上にない点 P を PM=2 cm になるようにとり，3 点 A，B，P を通る円を O とします。直線 PM と円 O との交点のうち 点 P 以外の点を C とします。∠PMA＝60°のとき，次の問いに答えなさい。ただし，円周率は π とし，弧 AP，弧 BC はともに小さい方の弧とします。

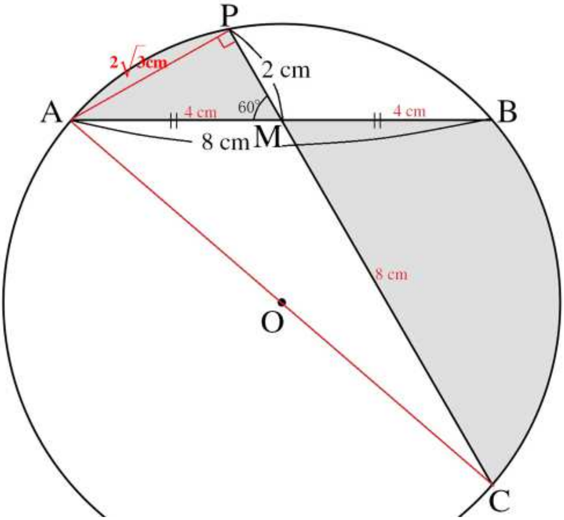


（1）円 O の半径 OA の長さを求めなさい。

（2）図の網掛け部分▢の面積を求めなさい。

【解答解説】

（**1**）（**2** 点）



△AMP は，∠AMP＝60°，AM：MP＝2：1 なので，有名三角形となり，∠APM＝90°，よって，円周角が 90°だから，AC は直径となる（AC を結ぶと点 O を通ることから，そこからもなんとなく AC が直径であることが分かる）。

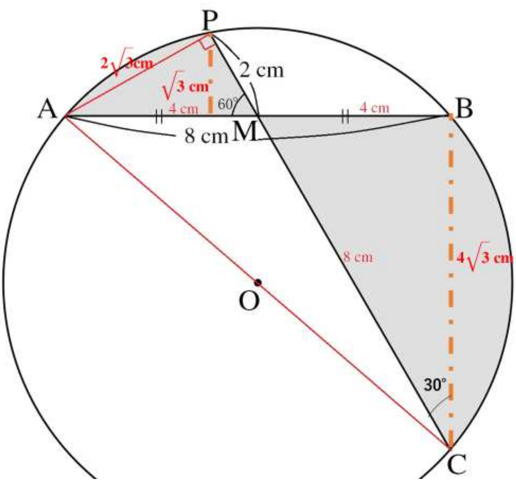
また，$PA = 2\sqrt{3}$ cm

△AMP∽△CMB だから，CM：MB＝2：1 なので，CM＝8 cm

△APC において，三平方の定理より，$AC = \sqrt{12 + 100} = 4\sqrt{7}$ cm

よって，**半径 OA＝$2\sqrt{7}$ cm**

（**2**）（**3** 点）



直接求めるのはだるいので，半円から，白い部分（not 網掛け部分）の面積を引いて求めることにする。

①，△MAC と△MPB

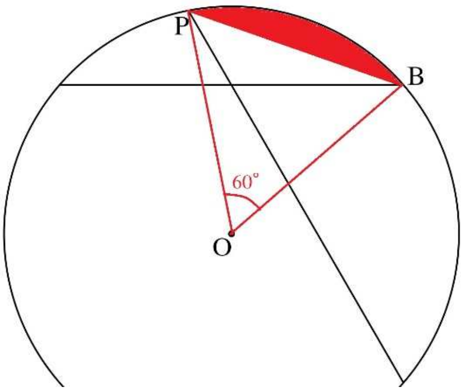
$$\triangle MAC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\ cm^2$$

$$\triangle MPB = 2\sqrt{3}\ cm^2$$

である。

合計$10\sqrt{3}\ cm^2$

②，弧 PB と線分 PB に囲まれた部分



弧 PB に対する円周角$\angle$PCB＝30°

であるから，中心角$\angle$POM＝60°

△OPB は正三角形なので，

$\triangle \mathrm{OPB} = 7\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$

扇形 OPB

$= \dfrac{1}{6} \times 28\pi = \dfrac{14}{3}\pi\ \mathrm{cm}^2$

よって囲まれた部分は，

$\dfrac{14}{3}\pi - 7\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$

半円の面積は，$14\pi\ \mathrm{cm}^2$なので，求める面積は，

$$14\pi - 10\sqrt{3} - \left(\frac{14}{3}\pi - 7\sqrt{3}\right) = \boldsymbol{\frac{28}{3}\pi - 3\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2}$$

【コメント】

Google や YouTube で検索するとよく出てくる問題です。分割したり足したり引いたりして面積求める定番問題です。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/