

確率と比率の大小

範囲：確率・因数分解

難易度：★×5

得点

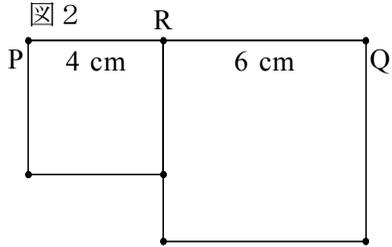
/10

出典：2022年度 神奈川県

図1のように、線分PQがあり、その長さは10 cmである。大、小2つのさいころを同時に1回投げ、大きいさいころの出た目の数を a 、小さいさいころの出た目の数を b とする。出た目の数によって、線分PQ上に点Rを、 $PR : RQ = a : b$ となるようにとり、線分PRを1辺とする正方形をX、線分RQを1辺とする正方形をYとし、この1つの正方形の面積を比較する。

<例>

大きいさいころの出た目の数が2、小さいさいころの出た目の数が3のとき、 $a = 2, b = 3$ だから、線分PQ上に点Rを、 $PR : RQ = 2 : 3$ となるようにとる。この結果、図2のように、 $PR = 4$ cm、 $RQ = 6$ cmで、Xの面積は 16 cm^2 、Yの面積は 36 cm^2 であるから、Xの面積はYの面積より 20 cm^2 だけ小さい。



いま、図1の状態、大、小2つのさいころを同時に1回投げるとき、次の問いに答えなさい。ただし、大、小2つのさいころはともに、1から6までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。

(ア) 次の□の中の「こ」「さ」にあてはまる数字をそれぞれ0~9から1つずつ選び、その数字を答えなさい。

Xの面積とYの面積が等しくなる確率は $\frac{\square}{\square}$ である。

(イ) 次の□の中の「し」「す」「せ」にあてはまる数字をそれぞれ0~9から1つずつ選び、その数字を答えなさい。

Xの面積がYの面積より 25 cm^2 以上大きくなる確率は $\frac{\square}{\square}$ である。

【解答例】

2つのさいころの出目は $6 \times 6 = 36$ 通りである。

(ア) (5点)

$a = b$ となればよいだけ、 $(1, 1) \sim (6, 6)$ の 6 通り、 $\frac{1}{6}$

(イ) (5点)

$PR = x$ cm, $RQ = y$ cm とする。面積の差が 25 cm^2 となるとき、

$$\begin{cases} x + y = 10 \dots \textcircled{1} \\ x^2 - y^2 = 25 \dots \textcircled{2} \end{cases} \quad \textcircled{2} \text{より, } (x + y)(x - y) = 25 \quad \textcircled{1} \text{を代入して,}$$

$$x - y = \frac{5}{2} \dots \textcircled{3} \quad \textcircled{1}, \textcircled{3} \text{より, } x = \frac{25}{4}, y = \frac{15}{4}$$

よって、 $x : y = 5 : 3$ 、すなわち $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$ なので、 $\frac{a}{b} \geq \frac{5}{3}$ であれば (※)。

X の面積が Y の面積より 25 cm^2 以上大きくなる。

$a=2$	$\frac{2}{1}$
$a=3$	$\frac{3}{1}$
$a=4$	$\frac{4}{1}, \frac{4}{2}$
$a=5$	$\frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}$
$a=6$	$\frac{6}{1}, \frac{6}{2}, \frac{6}{3}$

$\frac{a}{b}$ の組み合わせは、

左図の 10 通り。

$$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

(※) 例えば、

$\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ であれば、

X の面積が小さくなる (PR が短くなる)

$\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$ であれば、X の面積が大きくなる (PR が長くなる)

と考えると、 $\frac{a}{b} \geq \frac{5}{3}$ と考えるとたぶん理解しやすい。

【コメント】

とても公立らしい問題ですね。ただ神奈川，大問 4～大問 6 で全て比率用いて問題文書いています，ちょっと飽きるね。大問 4，大問 6 は別の表現でも良かったんじゃない。

(ア) は問題文素早く読んで，聞いていることすごく単純だなと気づけば余裕です。

問題が (イ)。解答例のような解き方できる中学生果たしてどのくらいいるのだろうか.....。②から③に変換する問題はまあまあ有名？確率の皮を被った計算問題ですね。

・関数で似たような問題 (オリジナル)

<https://hokkaimath.jp/blog-entry-97.html>

無事 $a/b=5/3$ と出ても，この大小を比較するのが難しそう。5/3 より大きければ良いのかな，小さければよいのかな，少し立ち止まって考えればいけるのですが，今年度問題の難易度おかしいので (特に大問 3 (イ) (エ)) 疲弊して無理だった中学生多そう。可哀想，でもそんなもんだ。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>