濃厚な小問集合		
範囲：小問集合	難易度：★×7	得点　　　　/25

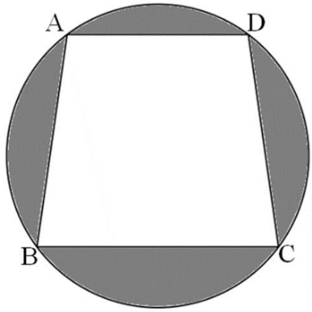
出典：2014 年度　立教新座高校

以下の問いに答えよ。

（1）$x = 3 + \sqrt{10}$，$y = 3 - \sqrt{10}$ のとき，$x^8y^6 - x^3y^5$ の値を求めよ。

（2）等式 $x^2 - 9y^2 = 133$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

（3）図で四角形 ABCD は円に内接し，AD//BC，AD＝6，AB＝$5\sqrt{2}$，BC＝8 である。影のついた部分の面積を求めよ。



（4）0，1，2 の 3 種類の数字を用いて整数をつくり，次のように小さい順に並べていく。

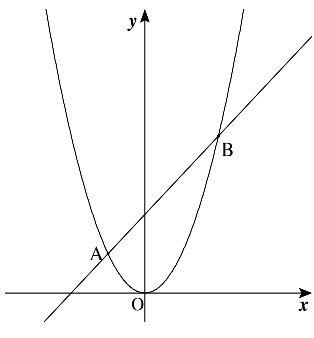
0，1，2，10，11，12，20，…

次の問いに答えよ。

① 15 番目の数を求めよ。

② 2011 は何番目の数か答えよ。

（5）図のように放物線 $y＝a^2x^2$ と直線 $y＝ax＋2$ が 2 点 A，B で交わっている。ただし，$a＞0$ とする。△AOB が直角三角形になるとき，a の値を全て求めよ。



【解答例】

（1）（4点）

$xy = \left(3+\sqrt{10}\right)\left(3-\sqrt{10}\right) = -1$ より，$x^3y^3 = -1$，$x^6y^6 = 1$ だから，

$x^8y^6 - x^3y^5 = x^6y^6 \bullet x^2 - x^3y^3 \bullet y^2$

$= x^2 + y^2 = \left(3+\sqrt{10}\right)^2 + \left(3-\sqrt{10}\right)^2 = \mathbf{38}$

（2）（5点）

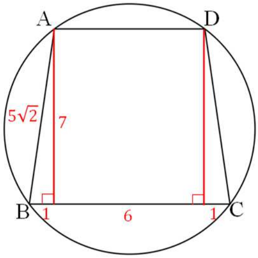
$x^2 - 9y^2 = (x+3y)(x-3y)$，$133 = 133 \times 1 = 19 \times 7$，$x+3y > x-3y$より，

$\begin{cases} x+3y = 133 \\ x-3y = 1 \end{cases}$，または，$\begin{cases} x+3y = 19 \\ x-3y = 7 \end{cases}$ となる。

これらを解いて，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{67}, \mathbf{22})$，$(\mathbf{13}, \mathbf{2})$

（3）（5 点）

<u>Point 円に内接する台形は必ず等脚台形である！（※）</u>

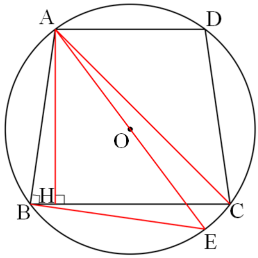


よって，左図のように点 A から BC に垂線を下すと，

その垂線の長さは，$\sqrt{50-1}=7$

台形 ABCD $=\dfrac{1}{2}\times(8+6)\times 7=49$

＜解答例 1＞有名な解法？



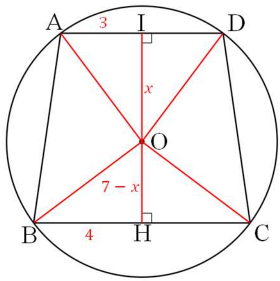
点 A から BC に垂線を下ろし交点を H とする。

円の中心を O とし，直線 AO と円周の交点を E とする。△AHC∽△ABE，AH：AC＝1：$\sqrt{2}$ だから，

$AE=\sqrt{2}AB=10$，よって円の半径は 5 となるから，

円の面積は25π，求める面積は$\mathbf{25\pi-49}$

＜解答例 2＞



円の中心を O とし，点 O から BC，AD に垂線を下ろし交点をそれぞれ H，I とする。

OI＝x とすると，OH＝7－x

$OA^2=x^2+9$，$OB^2=x^2-14x+65$

$OA^2=OB^2$より $x=4$，よって，OA＝5 となるから，

円の面積は25π，求める面積は$\mathbf{25\pi-49}$

（※）参考問題

オリジナル？：https://hokkaimath.jp/blog-entry-115.html

2015 年度立川高校など：https://hokkaimath.jp/blog-entry-30.html

（**4**）（**3** 点×**2**）

<u>注意　問題文をよく読む！</u>

$\underbrace{\underbrace{0，1，2}_{3\text{個}}，10，11，12，20，21，22}_{9\text{個}}$，100，101，102，110，111，112，…

①15 番目の数は **112**

②1 桁，2 桁の整数は全部で 9 個ある。これを利用すると，

3 桁の整数で，一の位が 1 なのは，全部で 9 個ある。

同様に，3 桁の整数で，一の位が 2 なのも，全部で 9 個。

4 桁の整数で一の位が 1 なのは「1000，1001，……，1222」，全部で 9×3 ＝27 個ある。

一の位が 2 なのは「2000，2001，2002，2010，**2011**」54＋5＝**59 番目**

（**5**）（**5** 点）

2 点 A，B の x 座標は，$a^2x^2 = ax + 2$ を解いて求める。

$ax = A$ と置いて，$A^2 - A - 2 = 0$，$(A-2)(A+1) = 0$，$A = 2$，$A = 1$

$x = \dfrac{2}{a}$，$x = -\dfrac{1}{a}$ となるから，A$\left(-\dfrac{1}{a}, 1\right)$，B$\left(\dfrac{2}{a}, 4\right)$

OA の傾きは $1 \div \left(-\dfrac{1}{a}\right) = 1 \times (-a) = -a$，OB の傾きは $2a$,

AB の傾きは，$3 \div \left(\dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{a}\right) = 3 \div \left(\dfrac{3}{a}\right) = a$

2 直線が垂直に交わるとき，傾きの積は－1 なので,

OA ⊥ OB のとき，$-2a^2 = -1$，$a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

OA ⊥ AB のとき，$-a^2 = -1$，$a = 1$

OB ⊥ AB のとき，$2a^2 = -1$，これを満たす実数 a は存在しない，$\boldsymbol{a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1}$

【コメント】

大問 1 の小問集合からかなりしんどくないと文句言いたくなる問題です。（4）は高校生でも苦戦するんじゃない？私は問題文読み落としてミスしました，悔しい～。

（1）は先に xy 求めて楽する問題です，たまに出現しますね。

（2）もよくある整数問題ですが，色々注意。

（3）はしんどいですね。円に内接する台形は等脚台形であることは，難関私立では常識みたいですね。北海道じゃ考えられない！それが分かっても，地味に円の半径求めるのがしんどいです。

（5）は，難関私立受ける子なら余裕です……と言いたいところですが，点 A と点 B の x 座標求めるのに勇気が必要です。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/