

条件付き確率と関数

範囲：確率，一次関数

難易度：★×5

得点

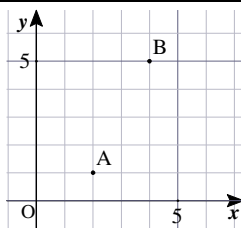
/17

出典：2022年度 埼玉県

先生「次の設定を使って，確率の問題をつくってみましょう。」

設定

座標平面上に2点A(2, 1), B(4, 5)があります。1から6までの目が出る1つのさいころを2回投げ，1回目に出た目の数を s ，2回目に出た目の数を t とすると，座標が (s, t) である点をPとします。ただし，さいころはどの目が出ることも同様に確からしいものとし，座標軸の単位の長さを1cmとします。



【Hさんが作った問題】

$\angle APB = 90^\circ$ になる確率を求めなさい。

【Eさんがつくった問題】

3点A, B, Pを結んでできる図形が**三角形になる場合のうち**， $\triangle ABP$ の面積が 4 cm^2 以上になる確率を求めなさい。

Rさん「【Hさんがつくった問題】について， $\angle APB = 90^\circ$ になる点Pは何個かみつかるけど，これで全部なのかな。」

Kさん「円の性質を利用すると，もれなくみつけることができそうだよ。」

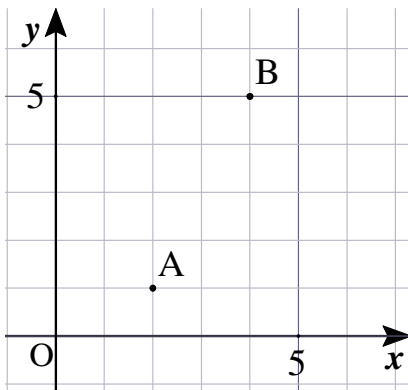
Rさん「【Eさんがつくった問題】は【Hさんがつくった問題】と違って，**三角形になる場合のうち**，としているから注意が必要だね。」

Kさん「点Pの位置によっては，3点A, B, Pを結んでできる図形が三角形にならないこともあるからね。」

Rさん「点Pが直線 ア 上にあるときは三角形にならないから，三角形になる場合は全部で イ 通りになるね。」

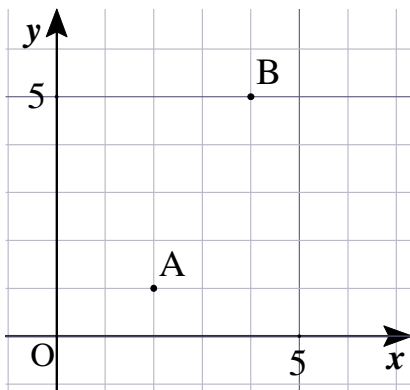
Kさん「そのうち， $\triangle ABP$ の面積が 4 cm^2 以上になる点Pの個数がわかれば，確率を求めることができそうだね。」

- (1) 【H さんがつくった問題】について、
 $\angle APB = 90^\circ$ になる確率を求めな
 さい。(5 点)



- (2) にあてはまる直線の式を求
 めなさい。また、 にあてはま
 る数を求めなさい。(6 点)

- (3) 【E さんがつくった問題】について、 $\triangle ABP$ の面積が 4 cm^2 以上にな
 る確率を、途中の説明も書いて求めなさい。その際、解答用紙の図を
 用いて説明してもよいものとします。(6 点)



【解答例】

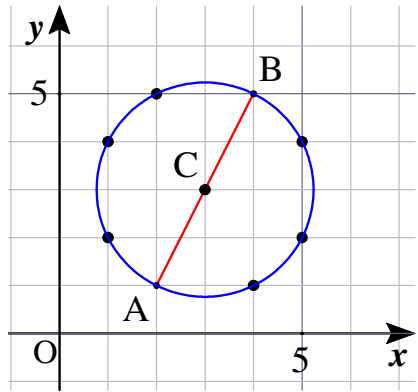
(1)

Point1 高校受験ではコンパスの持ち込みが許可されているので、コンパスを使用する！

Point2 なぜか問題文の右にグラフ用紙があるので、もちろん利用する！

Point3 会話文中で、Kさん「円の性質を利用すると、もれなくみつけることができそうだよ。」と露骨にヒントを述べている。

ABを直径とする円(点Cが中心)をコンパスで描き、格子点(x座標y座標とも整数である点)を数える。6つあるので、求める確率は、 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$



(2)

3点A, B, Pが一直線上にあるとき $\triangle ABP$ ができない。

直線ABの式は(ア) $y = 2x - 3$, 直線AB上の点は, (2, 1) (3, 3) (4, 5)の3通りなので, 三角形になる場合は全部で $36 - 3 =$ (イ) **33通り**。

※ (3, 3) の他に A (2, 1) B (4, 5) を忘れないようにする

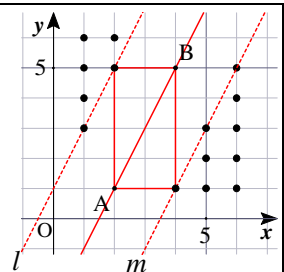
(3)

Pが(2, 5) (4, 1) のとき, $\triangle ABP = 4 \text{ cm}^2$ になる。

これら2つの点から, 直線ABに平行な直線 l, m を引くと, これらの直線上に点Pがあれば, $\triangle ABP = 4 \text{ cm}^2$ となる。よって点Pが直線 l より左(x座標が負)側, 直線 m より右側にあれば $\triangle ABP > 4 \text{ cm}^2$ となるので, それを満たす点は, 図より 15個ある。

三角形になる場合は (2) より 33通りなので, 求める確率は,

$$\frac{15}{33} = \frac{5}{11}$$



【類題】

(1) : 2015 年度北海道 <https://hokkaimath.jp/blog-entry-27.html>

(3) : 2009 年度北海道 <https://hokkaimath.jp/blog-entry-80.html>

【コメント】

昔北海道の入試で類題があるんです、それをパワーアップさせたような問題ですね。北海道の入試を解いていれば有利でした。埼玉県の中学生在が北海道のこんな大昔の問題解くなんてありえないか.....。

(1) は露骨にヒント散りばめていますね。コンパス使えということです。図もあるしね。

(2) は点 A, B を忘れないように。私は最初解いたとき忘れていました！残念！

(3) は条件付き確率ですよ。15/36 としてしまった中学生がほとんどじゃないでしょうか。**太字**で強調しているとはいえ完答者は少なさそう。7点満点なので、5~6点の人が多いのかな、部分点は貰えそう。

あと、会話文問題にしてはかなり会話がヒントになる珍しい問題です。某県と大違い。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>