

かなりしんどい整数問題			
範囲：整数問題	難易度：★×7	得点	/25

出典：2023 年度 早稲田大学本庄高等学院

正の整数 m, n に対して，数 $h(m, n)$ を

$$h(m, n) = \frac{1}{2}(m+n)(m+n-1) - m + 1$$

と定める。例えば， $h(1,1) = 1$ ， $h(2,1) = 2$ ， $h(1,2) = 3$ である。

次の各問に答えよ。

問 1 $h(27,2) + h(26,3)$ を計算せよ。

問 2 等式 $h(3m, 3m+4) = 1987$ を満たす正の整数 m の値をすべて求めよ。

問 3 等式 $h(m, n) = 2023$ を満たす正の整数の組 (m, n) をすべて求めよ。

【解答例】

問 1 (8 点)

$$\begin{aligned}h(27,2) + h(26,3) &= \frac{1}{2} \times 29 \times 28 - 27 + 1 + \frac{1}{2} \times 29 \times 28 - 26 + 1 \\&= (30 - 1)(30 - 2) - 27 - 26 + 2 = 900 - 90 + 2 - 53 + 2 = \mathbf{761}\end{aligned}$$

問 2 (8 点)

$$\begin{aligned}h(3m, 3m + 4) &= \frac{1}{2}(6m + 4)(6m + 3) - 3m + 1 \\&= \frac{1}{2}(36m^2 + 42m + 12) - 3m + 1 = 18m^2 + 18m + 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}18m^2 + 18m + 7 &= 1987 \text{ より, } 18m^2 + 18m - 1980 = 0 \\m^2 + m - 110 &= 0, (m + 11)(m - 10) = 0, \mathbf{m = 10}\end{aligned}$$

問 3 (9 点)

$$\frac{1}{2}(m + n)(m + n - 1) - m + 1 = 2023 \text{ より,}$$

$$\frac{1}{2}(m + n)(m + n - 1) - m = 2022 \dots \dots \textcircled{1}$$

$(m + n)$, $(m + n - 1)$ は連続する 2 つの自然数であるので,

$(m + n)(m + n - 1)$ は偶数となるから, $\frac{1}{2}(m + n)(m + n - 1)$ は自然数となる。

①より, $\frac{1}{2}(m + n)(m + n - 1) \geq 2023$ であるので, $\frac{1}{2}(m + n)(m + n - 1)$ が

2023 に近い自然数になるときを考える。ここで, $\mathbf{64^2 = 2^{12} = 4096}$ は国民の常識であるので, $m + n$ は 64 くらいの数である。

$$\frac{1}{2} \cdot 64 \cdot 63 = 2016, \quad \frac{1}{2} \cdot 65 \cdot 64 = 2080, \quad \frac{1}{2} \cdot 66 \cdot 65 = 2145 (m \leq 65), \text{ より,}$$

①を満たすのは, $m + n = 65$ のみである (※)。

$$\text{よって, } 2080 - m = 2022 \text{ より, } m = 58, n = 7 \quad \mathbf{(m, n) = (58, 7)}$$

※塾・教育関係者が, 私の作成した PDF・画像をネット(Twitter など)上に無断転載することを固く禁じます。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>

(※) $m + n \geq 66$ は明らかに OUT だが、それなりに真面目に考える。

$m + n = A$ と置く。 $\frac{1}{2}A(A-1)$ において、 A が1増えると、 $\frac{1}{2}A(A+1)$

$\frac{1}{2}A(A+1) - \frac{1}{2}A(A-1) = A$ なので、 $\frac{1}{2} \cdot 66 \cdot 65 = 2145$ の後、

$\frac{1}{2} \cdot 67 \cdot 66 = 2145 + 66$, $\frac{1}{2} \cdot 68 \cdot 67 = 2145 + 66 + 67 \dots \dots$ と、増えていく。

一方 A が1増えても m の最大値は1しか増えない。

したがって $m + n = 66$ のとき①を満たさないので、 $m + n \geq 66$ では①を満たさない。こんなんでいいだろうか。

【コメント】

まず一般的な中学生には $h(m, n)$ という表記が見慣れなくてしんどいかもかもしれませんね。

問1はなんとか代入して解いてください。ただの計算問題、見かけ倒し。

問2も m に $3m$ を代入、 n に $3m+4$ を代入すれば良いだけなのですが、中学生にはシンドイかも。本当は $(3m, 3m+4)$ ではなくて、 $(3k, 3k+4)$ のように表記した方が良いかもしれませんね。代入できれば二次方程式です。「すべて」と言っているのに1つしか答えありません、しんどい。

問3は一旦馬鹿になった方が良いでしょう。先に $\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)$ だけ考えて、その後にはどれくらい m を引けばいいかなと考えるのがたぶん良いはず。 $\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)$ は2023に近い数なので(m の大きさに限度がある)、とりあえず4046(2023の2倍)に近い平方数を考えますが……。最近では情報の授業も充実しているらしいので、2の累乗はある程度暗記しているはず。暗記してなくても一般的な人間は子供の頃、2の累乗で遊んでいるのですぐ思い出しますね。 $64^2 = 2^{12} = 4096$ はすぐ思い出すので、そのままいけばいけるはずでしょう。恐らく問題作成者もそのことを考えているはずですよ。