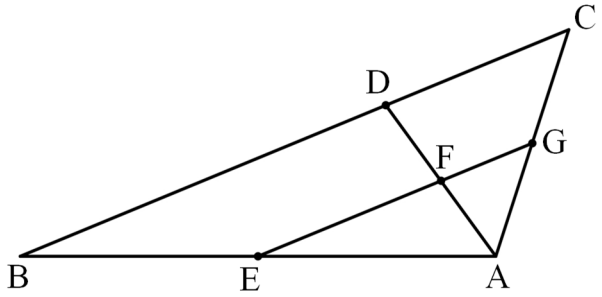
面積・長さ変換		
範囲：平面図形	難易度：★×6	得点　　/21

出典：たぶんオリジナル

下の図のように△ABC があります。∠BAC の二等分線と，辺 BC との交点を D とすると，AB：AC＝BD：DC＝2：1 となります。線分 AB，AD，AC の中点をそれぞれ E，F，G とします。次の問いに答えなさい。



問 1　DE＝EF を証明しなさい。（7 点）

問 2　線分 DG と線分 CE との交点を H とします。△CHG の面積は，△ABC の面積の何倍か求めなさい。（5 点）

問 3　EC＝tAC とします。点 C から直線 BA に垂線を下ろし交点を P とします。

（1）t のとりうる値の範囲を求めなさい。（4 点）

（2）線分 PC の長さは，線分 AD の長さの何倍か，t を用いて表しなさい。（5 点）

【解答例】

問 1

△ADE と△ADC において，仮定より，∠DAE＝∠DAC…①【1 点】

$AE = \frac{1}{2}AB$，$AC = \frac{1}{2}AB$ だから，$AE = AC$ …②【1 点】

共通な辺だから，AD＝AD…③【1 点】

①，②，③より 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，

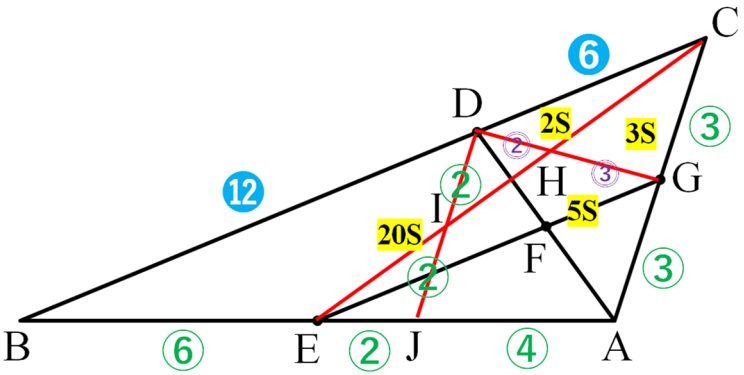
△ADE≡△ADC　したがって，DE＝DC…④【1 点】

$DC = \frac{1}{2}DB$，点 E，F はそれぞれ，AB，AD の中点であるから，

中点連結定理より，$EF = \frac{1}{2}DB$　ゆえに，$DC = EF$ …⑤【2 点】

④，⑤より，DE＝EF

問 2（5P 目に楽な解法の追記アリ）



点 D から CA と平行な直線を引き，EC，EA との交点をそれぞれ I，J とする。AG＝③とおくと，BJ：JA＝2：1＝8：4 なので，EJ＝②，

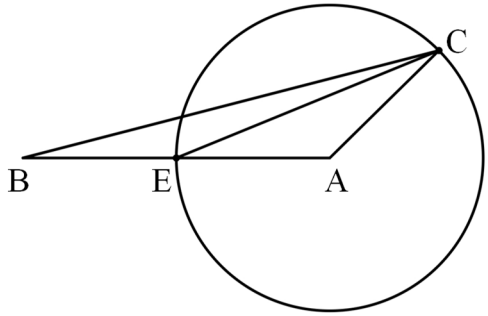
△EIJ∽△ECA なので，IJ＝②　また，DJ：CA＝2：3＝4：6 より，DI＝②

すると，△DIH∽△GCH で，DI：GC＝2：3 だから，DH：GH＝2：3

△DHG＝3S と置くと，上図のようにそれぞれ面積が表せ，△ABC＝30S

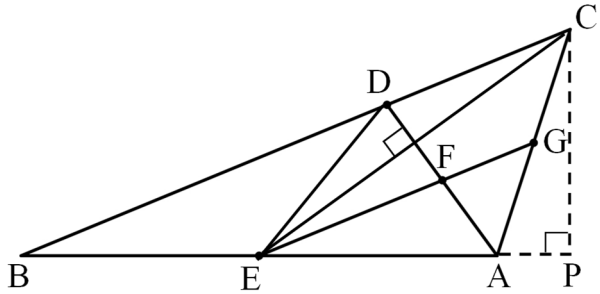
$\frac{1}{10}$倍

問 3（1）



点 A，E，B を固定すると，点 C は AE を半径とする円周上を動く。左図のように, 点 C が点 E と一致するとき $t=0$，EC が直径となるとき $t=2$ となるから, 求める範囲は，**$0<t<2$**　※$t=0$ と 2 では, △ABC ができない。

問 3（2）



四角形 ACDE は凧形なので，面積は$\frac{1}{2}\mathrm{AD}\times\mathrm{EC}$ で求められる。

$\triangle\mathrm{BED}=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}$ より，凧形 $\mathrm{ACDE}=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}$ であるから,

$$\frac{1}{2}\mathrm{AD}\times\mathrm{EC}=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}$$

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\times\mathrm{PC}$ なので，$\frac{1}{2}\mathrm{AD}\times\mathrm{EC}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{PC}$

$$\mathrm{PC}=\frac{3}{2}\times\frac{\mathrm{AD}\times\mathrm{EC}}{\mathrm{AB}}=\frac{3}{2}\times\frac{\mathrm{AD}\times t\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{3}{2}\times\frac{\mathrm{AD}\times t\mathrm{AC}}{2\mathrm{AC}}=\frac{3}{4}t\times\mathrm{AD}$$　**$\frac{3}{4}t$倍**

【コメント】

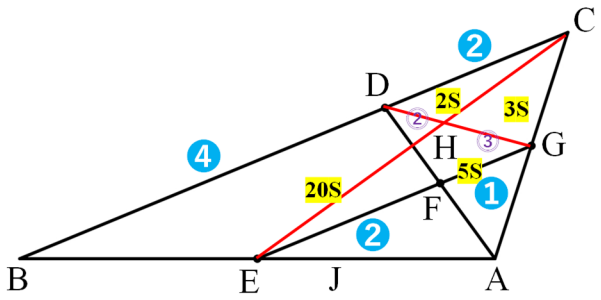
ちょっと前のオリジナル平面図形の問題がアクセス数稼いだので，味を占めてもう 1 回作ってみました。過去問を探しまくれば，似たような問題ありそうですけど。問 3 は，一応中 2 ぐらいでも解ける問題となっております。一応。難しいか簡単かはよく分かりません。

問 1 の証明は……結構難しいかもしれません。ひし形が隠れています。

問 2 はよくある平面図形のちょっとした難問です。たぶん他にもっと良い解法あります。

問 3 も，答え見ると簡単ですが，中学生が思いつくのはなかなか難しいかもしれません。少なくとも北海道の入試で出したら大変なことになります。私立ぽい問題ですね。これも他に良い解法あるかも。

【問 2 の追記】



△HEG∽△HCD で，EG：CD＝3：2 とすぐ分かる。

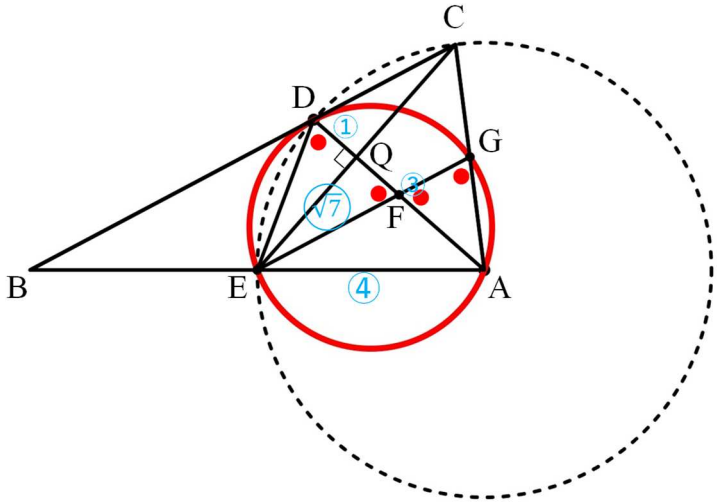
HG：HD＝3：2 なので，△CHG＝3S とすると，左図のように，△ABC＝30S となるから，

$\frac{1}{10}$倍

【問 3 の追加問題(メールフォームで貰ったもの)】

(3) 4 点 A，G，D，E が同一円周上にあるとき，t の値を求めなさい。

【問 3 追加問題の解答】



4 点 A，G，D，E が同一円周上にあるとき，△EDF∽△AGF となるから，△AGF は二等辺三角形である。FG//DC より，△ADC も二等辺三角形となるから，AE＝AD＝AC。EC と AD との交点を Q とする。

（解答例 1）

$\triangle \mathrm{AEC} = \frac{1}{2}\triangle \mathrm{ABC}$，　$\triangle \mathrm{DBC} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{6}\triangle \mathrm{ABC}$ なので，

△AEC：△DBC＝3：1 だから，AQ：QD＝3：1

（解答例 2）

問 1 の証明より，四角形 DEFC はひし形なので，FQ＝QD となる。また，AF＝FD であることから，AQ：QD＝3：1

AE：AQ＝4：3 となるから，AE：AQ：EQ＝4：3：$\sqrt{7}$となるので，

$\mathrm{EC}:\mathrm{AC} = 2\sqrt{7}:4 = \sqrt{7}:2$　　$\mathrm{EC} = \frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{AC}$　$\boldsymbol{t = \frac{\sqrt{7}}{2}}$

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/