ダイヤモンド		
範囲：ダイヤモンド	難易度：◆×6	得点　　　　/1771

出典：2021 年度栃木県改題，2015 年度山口県，オリジナル

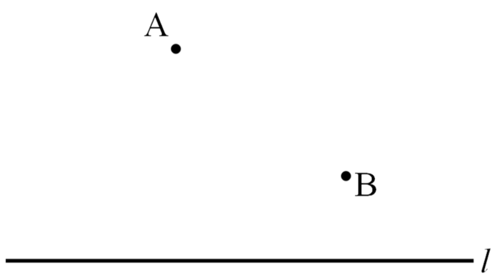
問 1　次の文の（　　）に当てはまる条件として最も適切なものを，**ア**，**イ**，**ウ**，**エ**のうちから**全て**選んで，記号で答えなさい。【122.4 点】

ア，AB＝BC　**イ**，AC⊥BD

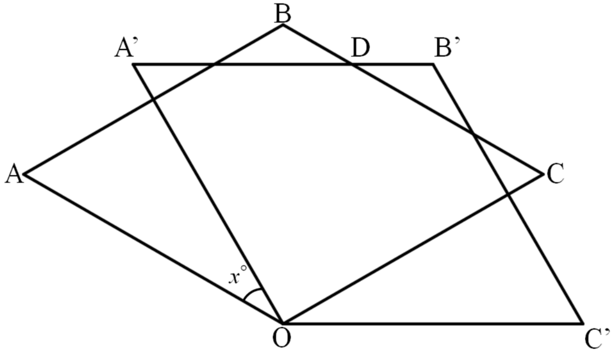
ウ，AC＝BD　**エ**，∠ABD＝∠CBD

平行四辺形 ABCD に,（　　）の条件が加わると, 平行四辺形 ABCD は，ひし形になる。

問 2　下の図のように，直線 l と，l 上にない 2 点 A，B がある。点 P が l 上にあり，2 つの線分 AB，PQ が対角線となるひし形 APBQ を，定規とコンパスを用いて作図しなさい。ただし，作図に用いた線は消さないこと。【81.3 点】



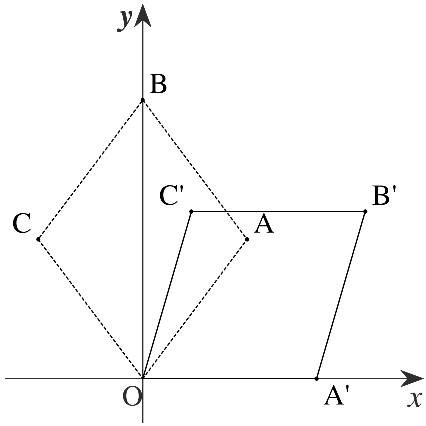
問 3　下の図のように，∠AOC＝120°のひし形 OABC があります。ひし形 OABC を，点 O を中心とし時計回りに x°回転させた図形をひし形 OA'B'C' とします。ただし，$0<x<60$ とします。A'B' と BC の交点を D とします。次の問いに答えなさい。



（1）DA'＝DC を証明しなさい。【560.3 点】

（2）$x=30$ とします。四角形 OA'DC の面積は，四角形 OABC の面積の何倍ですか，求めなさい。【7 点】

問 4　右の図のように，ひし形 OABC があり，点 A の座標は(3, 4)，点 O は原点とします。ひし形 OABC を，点 O を中心とし，線分 OA が x 軸と一致するまで時計回りに回転させた図形をひし形 OA'B'C' とします。点 C' の座標を求めなさい。【1000 点】

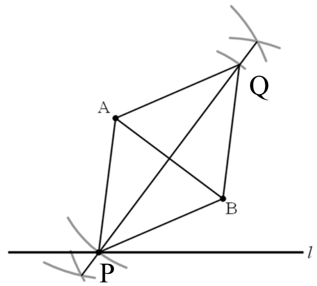


【解答例】

問 1

ア，イ，エ　※ウは長方形になる

問 2



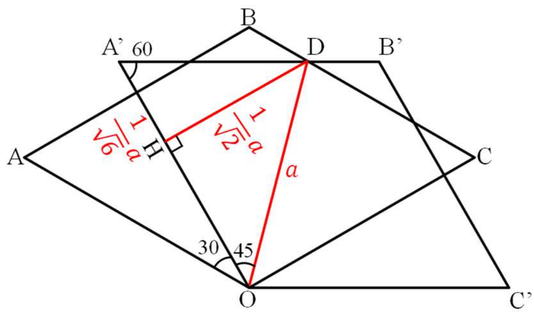
AB の垂直二等分線を引き，直線 l との交点を P とする。

AB と垂直二等分線との交点を O とすると，OP＝OQ となる点 Q をとればよい。

問 3（1）

△OA’C は OA’＝OC の二等辺三角形なので(底角は等しいから),
∠OA’C＝∠OCA’
ひし形の対角は等しいのと，回転させたので，∠OA’D＝∠OCD
∠DA’C＝∠OA’D－∠OA’C，∠DCA’＝∠OCD－∠OCA’
したがって，∠DA’C＝∠DCA’となり，△DA’C は二等辺三角形となるから，DA’＝DC

問 3（2）



ひし形の 1 辺の長さを 1 とする。

ひし形 OABC

$$=\frac{1}{2}\times 1\times \sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

四角形(たこ形)OA’DC の面積は，OD×A’C/2 で求められる。

△OA’C は直角二等辺三角形なので，A’C= $\sqrt{2}$

OD = aとし，点 D からOA′に垂線を下ろし交点を H とする。

すると，$\mathrm{OH}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}a$，$\mathrm{A'H}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}a$となり，

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}a+\dfrac{1}{\sqrt{6}}a=1$ であるから，$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}a=1$，$a=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ となる。

四角形$\mathrm{OA'DC}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$，したがって，

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{3}+1}}\text{倍}\left(=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\boldsymbol{\sqrt{3}-1}\text{倍}\right)$$

問 4

【解答例 1】中学生用

C(－3, 4)，△OAC の面積は 12 となる。

$\mathrm{OA'}=5$ だから，$\triangle\mathrm{OA'C}$ において底辺を$\mathrm{OA'}$とすると高さは$\dfrac{24}{5}$となるから，$\mathrm{C'}$のy座標は$\dfrac{24}{5}$，$\mathrm{OC'}=5$ なので，x座標は，三平方の定理より，

$$\sqrt{25-\frac{24^2}{5^2}}=\sqrt{\left(5+\frac{24}{5}\right)\left(5-\frac{24}{5}\right)}=\sqrt{\frac{49}{5}\times\frac{1}{5}}=\frac{7}{5},\quad \mathbf{C'}\left(\boldsymbol{\frac{7}{5},\frac{24}{5}}\right)$$

【解答例 2】複素数平面（高校生用）

$\angle\mathrm{AOA'}=\theta$とすると，$\cos(-\theta)=\dfrac{3}{5}$，$\sin(-\theta)=-\dfrac{4}{5}$なので，

$$(-3+4i)\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)=-\frac{1}{5}(3-4i)^2=-\frac{1}{5}(-7-24i)=\frac{7}{5}+\frac{24}{5}i,\quad \mathbf{C'}\left(\boldsymbol{\frac{7}{5},\frac{24}{5}}\right)$$

【コメント】

ダイヤモンド(ひし形)に関する問題を集めたり作ってみたりしてみました。バラエティ豊かですね。これで入試本番ひし形に関する問題が出てもたぶん大丈夫だ。