

約数の個数と集合

範囲：整数問題

難易度：★×5

得点

/12

出典：2022年度 堀川高校探求学科群

1 から順に 100 までの 100 個の整数があり、100 個のコップにこれらの整数が 1 つずつ書かれている。また、2 番から順に 100 番までの 99 個の番号があり、99 個のボタンにこれらの番号が 1 つずつ書かれている。 n は $2 \leq n \leq 100$ を満たす自然数とし、 n 番が書かれたボタンを押すと、 n の倍数が書かれているコップすべてに、1 個ずつボールが入る。

例えば、2 番が書かれたボタンを押すと、2 の倍数が書かれた 50 個のコップすべてに、1 個ずつボールが入る。

2 番が書かれたボタンから順に、3 番が書かれたボタン、4 番が書かれたボタン、……と各ボタンを 1 回ずつ押していくものとして、次の問いに答えなさい。なお、コップは十分に大きく、ボールはコップからあふれないものとする。

- (1) 100 番が書かれたボタンまで押したとき、次の問いに答えなさい。
 - (i) 整数 28 が書かれたコップに入っているボールの個数を求めなさい。
 - (ii) ボールが 2 個入っているコップの数字をすべて求めなさい。
- (2) x は $2 \leq x \leq 100$ を満たす自然数とする。 x 番が書かれたボタンまで押したとき、ボールが入っていないコップが 26 個あった。 x にあてはまる数を全て求めなさい。

【解答例】**(1) (i) (3点)**

$28 = 2^2 \times 7$ より、28の約数は、 $(2+1)(1+1) = 6$ 個ある。

そのうち約数1を除いて、 $6-1=5$ 個ボールが入る。

※28の約数は1, 2, 4, 7, 14, 28

(1) (ii) (4点)

ボールが2個入るには、4 ($=2^2$) など、約数が3個の整数であればよい。

約数が3個の整数は素数の2乗なので、**4, 9, 25, 49**

(2) (5点)

x 番目のボタンを押したとき、何個のコップにボールが入るか考える。

2番目のボタンを押すと、 $100 \div 2 = 50$ (2の倍数は50個)

3番目のボタンを押すと、 $100 \div 3 = 33$ あまり1 (3の倍数は33個)

4番目のボタンを押すと、 $100 \div 4 = 25$ (4の倍数は25個)

x	2	3	4	5	6	...
ボールが入るコップの個数	50	33	25	20	16	...
ボールが1個も入っていない コップの個数	50	33	33	26	26	...

3番目のボタンを押したとき、6や12など2と3の公倍数(6の倍数)は重複しているので、ボールが1個も入っていないコップの個数は、

$$100 - (50 + 33 - 16) = 33$$

4番目のボタンを押したとき、 $4=2^2$ だから、ボールが1個も入っていないコップの個数は変わらない。

5番目のボタンを押したとき、2と5の公倍数10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100と、3と5の公倍数15, 30, 45, 60, 75, 90は重複するので、ボールが1個も入っていないコップの個数は、 $33 - (20 - 13) = 26$

6番目のボタンを押したとき、 $6=2 \times 3$ だから、ボールが1個も入っていないコップの個数は変わらない。

よって、 **$x=5, 6$**

約数の個数の求め方諸々に関しては↓でも見ておいてください。

<https://hokkaimath.jp/blog-entry-273.html> (1987年度北海道)

軽く書くと、

p, q, r が全て異なる素数, a, b, c が自然数で, 自然数 N が,
 $N = p^a \times q^b \times r^c \dots$ で表されるとき, N の約数の個数は,
 $(a+1)(b+1)(c+1)\dots$ となる。

(例) $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ の約数の個数は, $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$ 個

【コメント】

ボールやらなんやら言っていますが, 約数・集合の問題です。(2)は, 高校数学で一応習いますが, 中学入試でも出されそうな問題ですね。

約数の個数に関しても, もう高校入試の常識なんでしょうね。北海道でさえ文教地区では定期テストで出題されています。難関高校に限定した入試ならどんどん出題しても良いでしょうね。一般的な公立入試で出されたら「？」ですが。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>