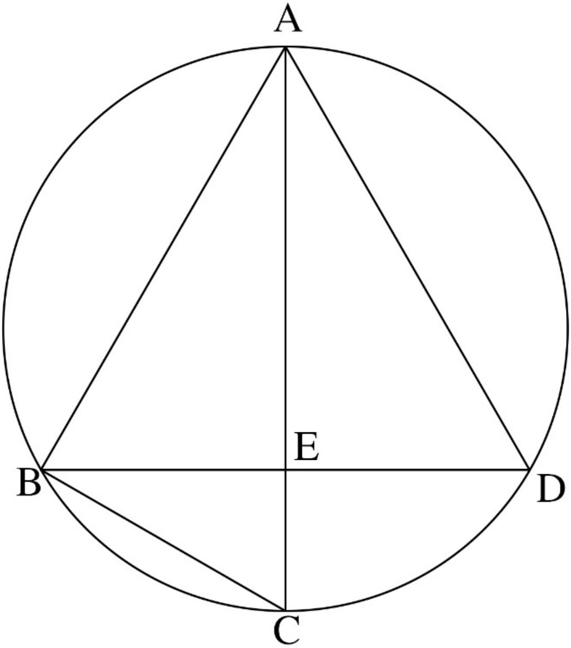
円周角証明の究極系		
範囲：中 3 円周角	難易度：★★★★☆	得点　　　　　　　/8

出典：オリジナル

下の図のように，線分 AC を直径とする円があり，円周上に点 B を取ります。また，円周上に AB＝AD となる，点 B とは異なる点 D を取り，線分 AC と線分 BD との交点を E とします。次の問いに答えなさい。



問 1　∠ACB＝60°，AC＝2 cm とします。△ABC の面積を求めなさい。

問 2　AC⊥BD を証明しなさい。

【解答例】

問 1（3 点）

BC＝1 cm，AB＝$\sqrt{3}$ cm となる。

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}\ \mathrm{cm}^2}$$

問 2（5 点）

＜解答例 1＞

△ABC と△AEB において，

共通な角だから，∠BAC＝∠EAB……①【1 点】

AB＝AD より，二等辺三角形の底角は等しいから，∠ABE＝∠ADB…②

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$に対する円周角は等しいから，∠ADB＝∠ACB…③

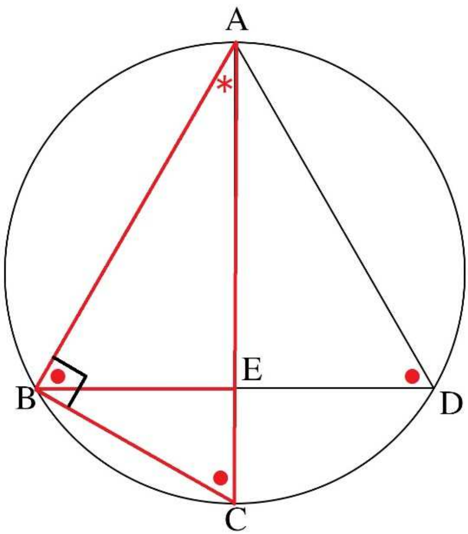
①，②より∠ABE＝∠ACB…④【2 点】

①，④より，2 組の角がそれぞれ等しいから，△ABC∽△AEB

したがって，∠ABC＝∠AEB

AC は直径で$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$に対する円周角だから，∠ABC＝90°【1 点】なので，

∠AEB＝90°　よって，AC⊥BD【1 点】



＜解答例 2＞

AB＝AD より，二等辺三角形の底角は等しいから，∠ABD＝∠ADB…①
弧 AB に対する円周角は等しいから，∠ADB＝∠ACB…②
①，②より∠ABD＝∠ACB…③【2 点】
AC は直径で弧 AC に対する円周角だから，∠ABC＝90°【1 点】
また，
∠AEB＝180°－∠ABD－∠BAE…④
∠ABC＝180°－∠ACB－∠BAE…⑤　【④，⑤両方で 1 点】
③，④，⑤より，∠ABC＝90°＝∠AEB
したがって，AC⊥BD【1 点】

【コメント】

高校入試で出題される図形の証明は，「三角形の合同，相似を証明しなさい」という，比較的方針がたてやすい問題が多いですが，捻ると「二等辺三角形を証明しなさい」等，少し方針がたてづらくなります。

方針がたてづらいものの究極系の 1 つは「直角を証明しなさい」です。本当に何していいか分かりません。模範解答を見ると，ただ合同を証明しているだけなど，結構簡単なことが多いのですがね。

この問題はそれを意識してみました。特に北海道では「は？」という証明が出されることが他県に比べて多いので，満点取りたいなら慣れておきましょう。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/