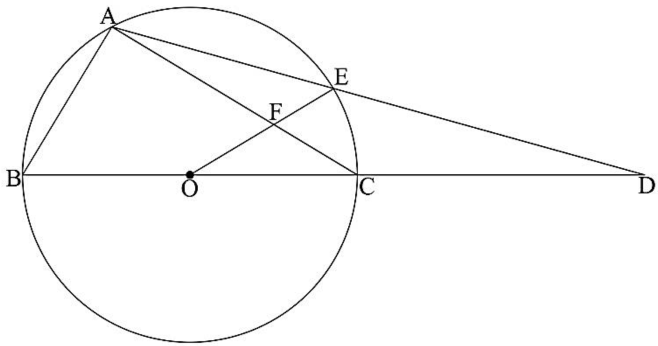
円周角と大量の二等辺 2		
範囲：中 3 図形円周角	難易度：★★★★★	得点　　　　　　/7

出典：2019 年度大阪府 C

下の図のように，△ABC は∠BAC＝90°，BC＝8 cm，AB＜AC の直角三角形である。点 O は，3 点 A，B，C を通る円の中心である。このとき，O は辺 BC の中点である。A と O とを結ぶ。D は直線 BC 上にあって C について B と反対側にある点であり，CD＝CA である。D と A とを結ぶ。E は, 線分 AD と円 O との交点のうち A と異なる点である。E と O とを結ぶ。F は，線分 EO と辺 AC との交点である。また，AC＝6 cm とする。

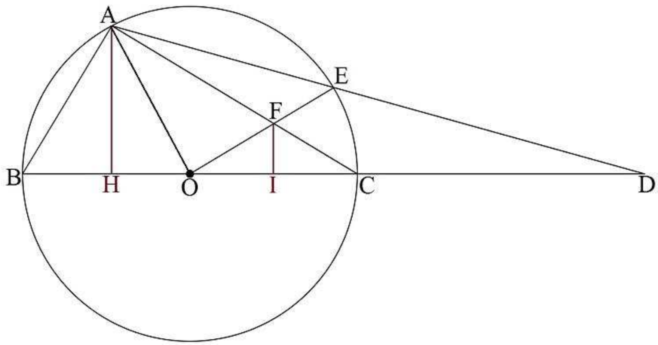
次の問いに答えなさい。



（1）線分 FC の長さを求めなさい。

（2）△AOF の面積を求めなさい。

【解答例】



（1）（4 点）

点 A，F から辺 BC に垂線を下ろし，交点をそれぞれ H，I とする。

FC＝FO＝x cm と置く。IC＝2 cm なので，FI $= \sqrt{x^2-4}$ cm

△ABC において，AB $= \sqrt{64-36} = 2\sqrt{7}$ cm

$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \times 6 = 6\sqrt{7}$ cm^2　$\triangle \mathrm{ABO} = \frac{1}{2} \triangle \mathrm{ABC} = 3\sqrt{7}$ cm^2

であるから，$3\sqrt{7} = \frac{1}{2} \times 4 \times \mathrm{AH}$ より，$\mathrm{AH} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$ cm

△AHC∽△FIC より，

$\triangle \mathrm{AHC} \backsim \triangle \mathrm{FIC}$ より，$\frac{3\sqrt{7}}{2} : \sqrt{x^2-4} = 6 : x$　　$6\sqrt{x^2-4} = \frac{3\sqrt{7}}{2}x$

$36(x^2-4) = \frac{63}{4}x^2$　　$\frac{81}{4}x^2 = 144$　$x > 0$ より，$x = \frac{8}{3}$　**FC $= \frac{8}{3}$ cm**

（2）（3 点）

$\triangle \mathrm{ACO} = \frac{1}{2} \triangle \mathrm{ABC} = 3\sqrt{7}$ cm^{2}であり，$\mathrm{AF} = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$ cm であるから，

$\triangle \mathrm{AOF} = 3\sqrt{7} \times \frac{1}{6} \times \frac{10}{3} = 3\sqrt{7} \times \frac{5}{9} =$ **$\frac{5\sqrt{7}}{3}$ cm^2**

【コメント】

絶対に（1）別解（もっと良い解法）がありますが，とりあえず載せておきます。ググったら出てくるかも？

直角もたくさんあるので，垂線下ろしたら都合が良いのでは？と考えました。本番の時間が無い極限状態で解けたら凄いかも。

【実は】

以前の問題があります。二等辺三角形の証明とか。

https://hokkaimath.jp/blog-entry-59.html