3 で割った余り		
範囲：式と計算	難易度：★×4	得点　　　　/15

出典：2023 年度　大阪星光学院高校

0 以上の整数 x に対して，x を 3 で割った余りを $f(x)$ と表すこととする。たとえば，$f(11)=2$，$f(24)=0$ である。

（1）$f(1024)=\boxed{}$，$f(1024\times 1025)=\boxed{}$ である。

（2）$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2023)=\boxed{}$ である。

（3）$f\left(f\left(2023^2\right)\times f(71)\right)+f(2023)\times f\left(71^2\right)=\boxed{}$ である。

【解答例】

（1）（2 点＋3 点）

1023 が 3 の倍数なので，1024 は 3 で割ると 1 余る。$\boldsymbol{f(1024) = 1}$

1024 は 3 で割ると 1 余り，1025 は 3 で割ると 2 余るので，

$\boldsymbol{f(1024 \times 1025) = 2}$

3 の倍数の見分け方：各桁の数の和が 3 の倍数
連続する 2 つの整数で，小さい方が 3 で割ると 1 余る$(3m+1)$，大きい方が 3 で割ると 2 余る$(3m+2)$とすると（m は整数），$(3m+1)(3m+2) = 9m^2 + 9m + 2 = 3\left(3m^2 + 3m\right) + 2$となることから，すぐ$\boldsymbol{f(1024 \times 1025) = 2}$と分かる。

（2）（5 点）

$|f(1) + f(2) + f(3)| + |f(4) + f(5) + f(6)| + \cdots + f(2023)$

$= |\ 1 + 2 + 0\ | + |\ 1 + 2 + 0\ | + \cdots + 1$

$2023 = 2022 + 1 = 674 \times 3 + 1$ であるので，

$|\ 1 + 2 + 0\ |$が 674 回出てくる。最後に$f(2023)$を足せばよいので，

結局答えは$3 \times 674 + 1 = \boldsymbol{2023}$

（3）（5 点）

2023 は 3 で割ると 1 余り，71 は 3 で割ると 2 余る。

m を整数とすると，$(3m+1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3\left(3m^2 + 2m\right) + 1$，

$(3m+2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3\left(3m^2 + 4m + 1\right) + 1$となるから，

2023^2 は 3 で割ると 1 余り，71^2 は 3 で割ると 1 余る。

$$f\left(f\left(2023^2\right) \times f(71)\right) + f(2023) \times f\left(71^2\right) = f(1 \times 2) + 1 \times 1 = \boldsymbol{3}$$

【コメント】

問題自体は時間さえかければ（後，問題文の意味が理解できれば），ほとんどの人が解けるでしょう。ただ素早く解くとなると，経験値が必要です。都立西の大問 4 や，大学入試でもう少し捻って出題されそうです。