

相似と動点 P

範囲：動点 P

難易度：★×5

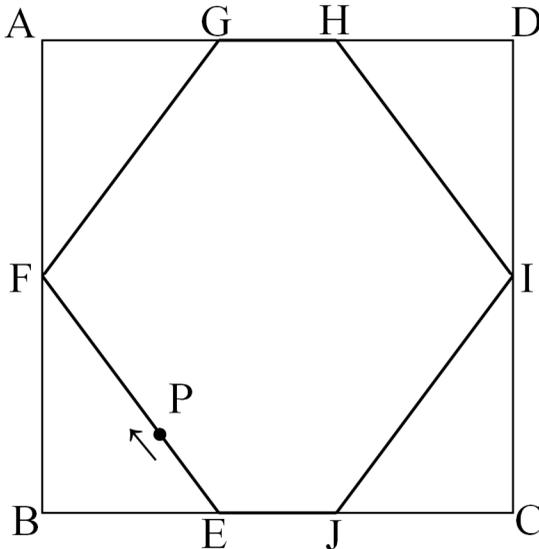
得点

/18

出典：2022年度 群馬県

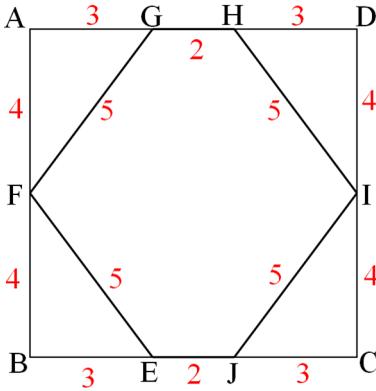
下の図のように、1辺 8 cm の正方形 ABCD において、辺 AB, CD の中点をそれぞれ F, I とし、辺 AD, BC 上に $AG=HD=BE=JC=3$ cm となる点 G, H, E, J をとり、六角形 EFGHIJ を作る。

点 P は、E を出発し、毎秒 1 cm の速さで六角形の辺上を $E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow J$ の順に動き、J で停止する。P が出発してから x 秒後の、三角形 EJP の面積を y cm² とする。次の (1) ~ (3) の問いに答えなさい。



- (1) 点 P が J に到着するのは、E が出発してから何秒後か、求めなさい。
- (2) 点 P が六角形 EFGHIJ において、次の①, ②の辺上にあるとき、 y を x の式で表しなさい。 ①, 辺 EF ②, 辺 HI
- (3) 点 P と異なる点 Q は、P が出発してから 3 秒後に E を出発し、毎秒 2 cm の速さで六角形の辺上を $E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow J$ の順に動き、J で停止する。点 Q が移動している間で、三角形 EJP の面積と三角形 EJQ の面積が等しくなるような x とそのときの y の組をすべて求め、それぞれ「 $x=a$ のとき $y=b$ 」のような形で答えなさい。

【解答例】

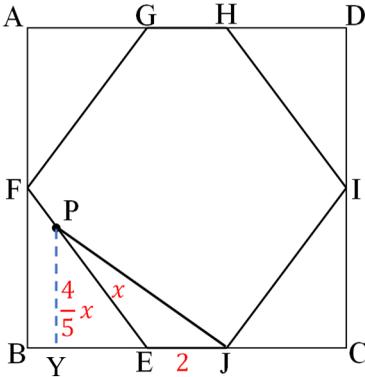


(1) (4点)

長さを書き込んでいく。3:4:5の嬉しい直角三角形がたくさん登場する。

$EF+FG+GH+HI+IJ=22$ cm なので、

22秒後



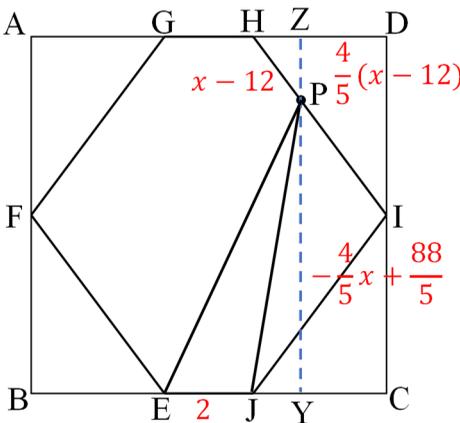
(2) (4点×2)

①, 辺EF上のとき

$\triangle EJP$ の底辺をEJとすると、左図で高さはPYとなる。 $\triangle FBE \sim \triangle PYE$ なので、 $PE=x$

のとき、 $PY = \frac{4}{5}x$

$$\triangle EJP = y = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{5}x = \frac{4}{5}x \quad \boxed{y = \frac{4}{5}x}$$



②, 辺HI上のとき

点Pが辺HI上を動くのは、 $12 \leq x \leq 17$ である。

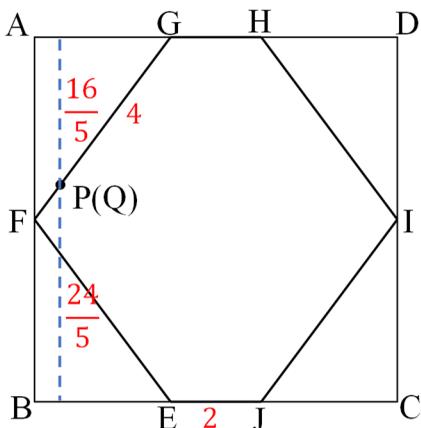
$HP=x-12$ となるので、左図で

$ZP = \frac{4}{5}(x-12)$ となるから、

$$PY = 8 - \frac{4}{5}(x-12) = -\frac{4}{5}x + \frac{88}{5}$$

$$\triangle EJP = \frac{1}{2} \times 2 \times \left(-\frac{4}{5}x + \frac{88}{5}\right) = -\frac{4}{5}x + \frac{88}{5} \quad \boxed{y = -\frac{4}{5}x + \frac{88}{5}}$$

(3) (3点×2)



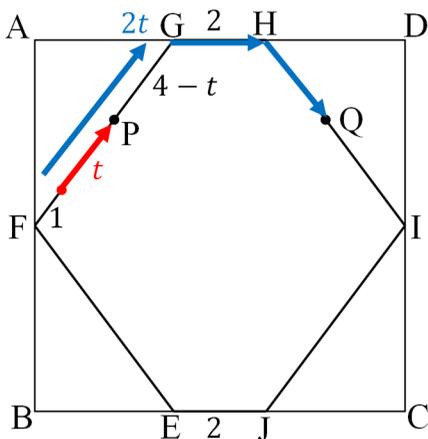
①, 点Pと点Qが一致するとき

Pが x cm 進んだとき, Qは $2(x-3)$ cm 進んでいるので, $x = 2(x-3)$ $x = 6$
 $PG = 4$ cm となるので, 高さは

$$8 - \frac{16}{5} = \frac{24}{5} \quad y = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{24}{5} = \frac{24}{5}$$

②, ①から何秒か進んだ, EJを底辺としたときの高さが一致するとき

一致するには, 点Pが辺FG上, 点Qは辺HI上を進んでいる必要がある。



①から点Pが t cm 進むと, 点Qは $2t$ cm 進む。このとき, $PG = 5 - t$ cm
 高さが一致するとき,

$$2t = t + (4 - t) + 2 + (4 - t)$$

$$3t = 10 \quad t = \frac{10}{3}$$

よって, $x = 6 + \frac{10}{3} = \frac{28}{3}$

高さは, $4 + \frac{13}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{112}{15}$

$$y = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{112}{15} = \frac{112}{15}$$

【コメント】

演習量の差が露骨に出る問題ですね。苦手な子は x を $4/5x$ に直すのも一苦労ですが, 問題集でしっかり演習した子は秒殺。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>