

反比例と文字式変形

範囲：反比例と文字

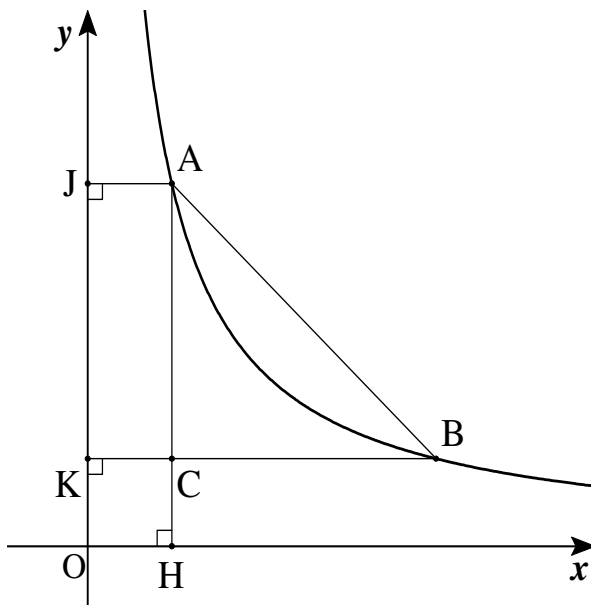
難易度：★★★★☆

得点

/20

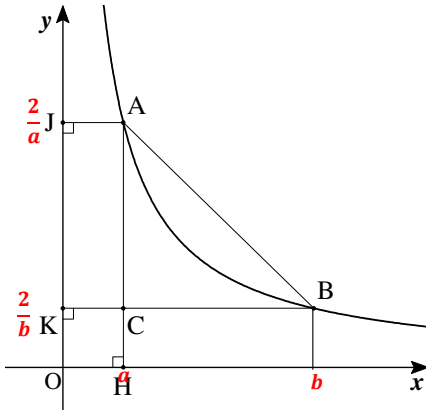
出典：2011 年度 久留米大学附設高校

下図のように、 $y = \frac{2}{x}$ のグラフ上に 2 点 A, B があり、 x 座標をそれぞれ a, b とする。A から x 軸に垂線 AH を、B から y 軸に垂線 BK を引き、 AH と BK の交点を C とすると、四角形 $OHCK$ の面積は $\frac{1}{2}$ であった。



- (1) x 座標の比 $a : b$ を、簡単な整数の比で表せ。
- (2) A から y 軸に垂線 AJ を引くとき、四角形 $AJKC$ の面積を求めよ。
- (3) $\triangle CAB$ の面積、 $\triangle OAB$ の面積をそれぞれ求めよ。

【解答例】



(1) (5点)

長方形 OHCK の面積は、

$$a \times \frac{2}{b} = \frac{2a}{b} = \frac{1}{2} \text{ だから,}$$

$4a = b \dots \dots \textcircled{1}$ よって、

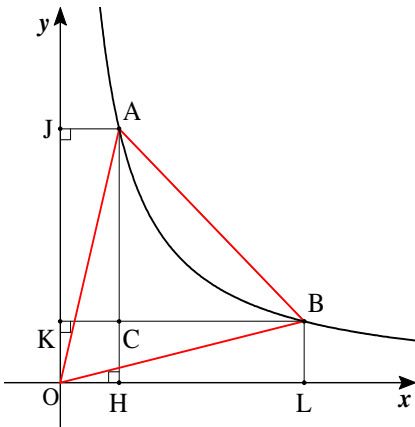
$$\mathbf{a : b = 1 : 4}$$

※1 : 4 逆にしないように注意！不安なら、 $a : b = 1 : 4$ を変形して、 $b = 4a$ となることを確認！

(2) (5点)

四角形 AJKC は長方形。面積は、 $a \times \left(\frac{2}{a} - \frac{2}{b}\right) = 2 - \frac{2a}{b} = 2 - \frac{2a}{4a} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

↑①を代入



(3) (5点×2)

$$\triangle CAB = \frac{1}{2} \times (b - a) \times \left(\frac{2}{a} - \frac{2}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2b}{a} - 2 - 2 + \frac{2a}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{8a}{a} + \frac{2a}{4a} - 4\right) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{9}{4}$$

B から x 軸に垂線を下ろし、交点を L とする。

$\triangle OAB = \text{五角形 ABLOJ} - \text{長方形 AJOH の半分} - \text{長方形 BLOK の半分}$

長方形 BLOK $= b \times \frac{2}{b} = 2$ 五角形 ABLOJ $= \frac{3}{2} + 2 + \frac{9}{4} = \frac{23}{4}$ だから、

$$\triangle OAB = \frac{23}{4} - 1 - 1 = \frac{15}{4}$$

※または、高校入試では禁断の？サラスの公式(クロスチョップ)を用いて、

$$\frac{1}{2} \left| \frac{2a}{b} - \frac{2b}{a} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} - 8 \right| = \frac{1}{2} \times \frac{15}{2} = \frac{15}{4} \quad \text{としても良い?}$$

【コメント】

反比例グラフを用いた、式変形能力が試される問題です。高校生にとってはとてもとても簡単。ある程度訓練積んだ中学生も、恐らく余裕で解けます。誘導も丁寧で、計算も楽です。

①を代入することによって、 a 、 b が消えます。難関私立受けるなら、満点目指したい問題ですね。

公立高校ではあんまり見ないタイプの問題です。

【作成】

高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>