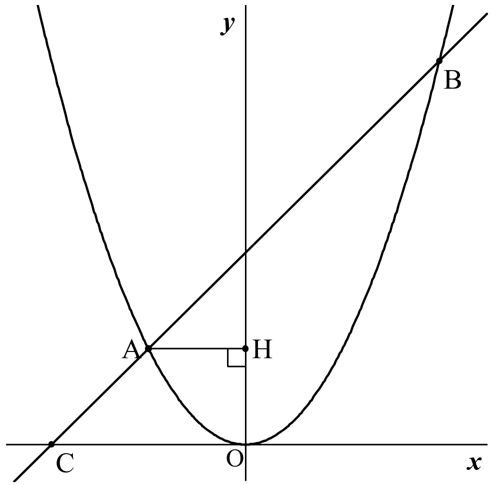
変化の割合マスターと回転体		
範囲：中 3 関数	難易度：★★★☆☆	得点　　　　　/20

出典：2020 年度　岡山県

次の図のように，x の値が−2 から 4 まで増加するときの変化の割合が 1 である関数$y = ax^2$について，グラフ上に 2 点 A，B があり，点 A の x 座標は−2，点 B の x 座標は 4 である。また，直線 AB と x 軸との交点を C とする。①，②は指示に従って答えなさい。③，④は$\boxed{}$に適当な数を書きなさい。



① 変化の割合が正になるのは，ア～エのうちではどれですか，当てはまるものをすべて答えなさい。

ア　関数 $y=2x$ で，x の値が 0 から 4 まで増加するとき。

イ　関数 $y=-3x+4$ で，x の値が 1 から 3 まで増加するとき。

ウ　関数$y=\dfrac{6}{x}$で，xの値が 3 から 6 まで増加するとき。

エ　関数 $y=-x^2$ で，x の値が−3 から 1 まで増加するとき。

② a の値は，次のように求めることが出来る。$\boxed{（1）}$には適当な式を書きなさい。また，（2）には a の値を求めなさい。ただし，（2）は答えを求めるまでの過程も書きなさい。

関数 $y=ax^2$ について，
$x=-2$ のとき，$y=4a$ である。
また，$x=4$ のとき，$y=\boxed{（1）}$である。
よって，変化の割合について，

（2）

③ 点 C の座標は（$\boxed{}$, 0）である。

④ 点 A から y 軸にひいた垂線と y 軸との交点を H とする。台形 OHAC を，直線 OH を回転の軸として 1 回転させてできる立体の体積は$\boxed{（1）}$$\text{cm}^3$ であり，表面積は$\boxed{（2）}$$\text{cm}^2$ である。ただし，原点 O から点（1, 0）までの距離，原点 O から点（0, 1）までの距離をそれぞれ 1 cm とする。

【解答例】

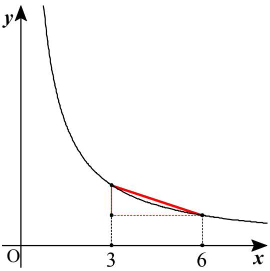
①（3点）

<u>**Point**　1次関数　$y=ax+b$ で，a が傾き（変化の割合），b が切片！</u>

アの傾きは2なので，常に変化の割合も2（正）

イの傾きは−3なので，常に変化の割合も−3（負）

ウ

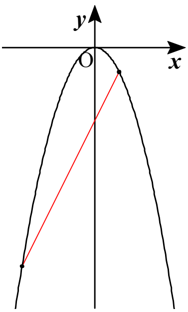


大人しく図を書くと，右下がりなので，どう考えても変化の割合は負となる。

図が書けないなら，$y=\frac{6}{x}$に，$x=3$，6を代入して，（3, 2）（6, 1）

変化の割合は，$-\frac{1}{3}$　と出してもよい。

エ



こちらも大人しく図を描くと，どう考えても変化の割合は正となる。図が書けないなら，$y=-x^2$ に，$x=-3$，1を代入して，（−3，−9），（1，−1）

$$変化の割合=\frac{yの増加量}{xの増加量}=\frac{8}{4}=2$$　正となる。

したがって，変化の割合が正なのは，

ア　エ

②（1）（3点）（2）（4点）

関数 $y=ax^2$ について，

$x=-2$ のとき，$y=4a$ である。

また，$x=4$ のとき，$y=$**$16a$** である。

よって，変化の割合について，

x の値が−2から4まで増加するときの変化の割合が1だから，

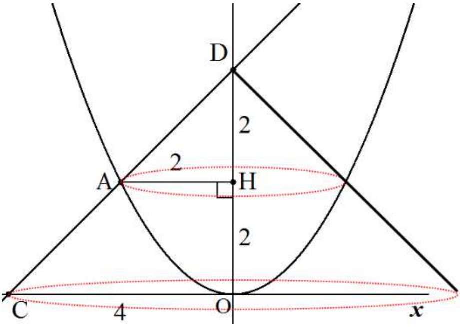
$\frac{12a}{6}=2a=1$　　$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$

③（3 点）

A（－2, 2），B（4, 8）となり，直線 AB は傾き 1 だから，AB : $y=x+4$

C の y 座標は 0 なので，$y=0$ を代入し，$x=-4$　C の x 座標は**－4**

④（1）（3 点）（2）（4 点）



直線 AB と y 軸との交点を D とする。△OCD を DO を軸として回転させてできる円錐の体積は，

$$\frac{1}{3}\times 16\pi \times 4 = \frac{64}{3}\pi\ \mathrm{cm}^3$$

△DAH を AH を軸として回転させてできる円錐の体積は，

$$\frac{1}{3}\times 4\pi \times 2 = \frac{8}{3}\pi$$

したがって求める体積は，$\frac{64}{3}\pi - \frac{8}{3}\pi = \boldsymbol{\frac{56}{3}\pi\ \mathrm{cm}^3}$

また，それぞれの円錐の側面積は，

△OCD）CD＝$4\sqrt{2}$で，$8\pi = 8\sqrt{2}\pi \times \frac{x}{360}$　$\frac{x}{360} = \frac{1}{\sqrt{2}}$　であるから，

$$32\pi \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 16\sqrt{2}\pi\ \mathrm{cm}^2$$

また，△OCD と△DAH の相似比が 2 : 1 だから，表面積比は 4 : 1

よって，△DAH）$4\sqrt{2}\pi\ \mathrm{cm}^2$　求める側面積は $12\sqrt{2}\pi\ \mathrm{cm}^2$となる。

上面と底面の円の面積は，$16\pi + 4\pi = 20\pi\ \mathrm{cm}^2$なので，求める表面積は，

$$\boldsymbol{\left(12\sqrt{2}+20\right)\pi\ \mathrm{cm}^2}$$

【コメント】

①～③で基本だけど大事なことを聞いていてとても良いですね。④も，問題演習をしっかりしていれば解ける問題。丁度良い問題です。

【作成】高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/