代入パズル空間図形		
範囲：空間図形	難易度：★×5	得点　　　　　/25

出典：2022 年度　日比谷高校

右の**図１**に示した立体 A-BCDE は，底面 BCDE がひし形で，AC＝AE＝BC＝8 cm，AB＝AD の四角すいである。四角形 BCDE の対角線 BD，CE を引き，交点を O とし, 頂点 A と点 O を結んだとき，∠AOB＝90°　である。四角形 BCDE の面積を S cm^2 とする。次の各問に答えよ。

図１

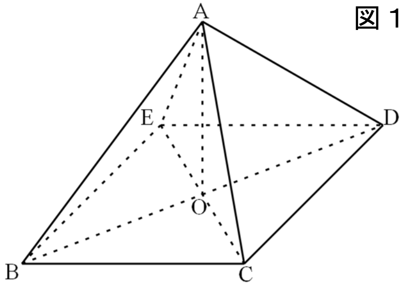
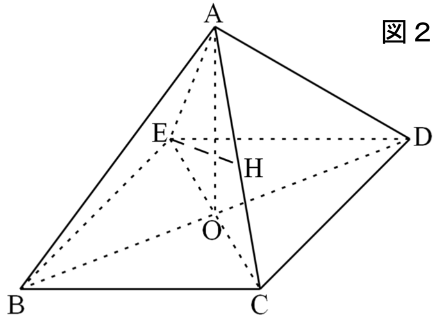
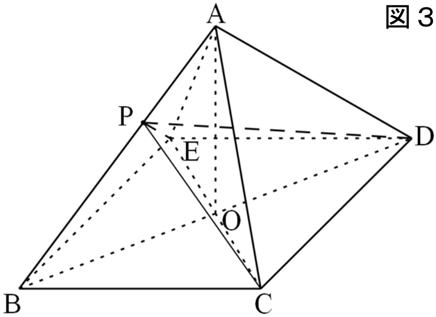


図２



問 1　右の**図２**は，**図１**において，頂点 E から辺 AC に垂線を引き, 辺 AC との交点を H とした場合を表している。線分 EH の長さは何 cm か。S を用いた式で表せ。

図３



問 2　右の**図３**は，図 1 において，辺 AB 上の点を P とし，点 P と頂点 C，点 P と頂点 D，点 P と頂点 E をそれぞれ結んだ場合を表している。次の（1），（2）に答えよ。

（1）AP：PB＝1：2，BD＝12 cm のとき，立体 P-BCDE の体積は何 cm^3 か。ただし，答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

（2）AP：PB＝1：1 のとき，△CEP の面積は何 cm^2 か。S を用いた式で表せ。

【解答例】

問 **1**（**7** 点）

$\triangle \mathrm{AEC} = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{AC} \times \mathrm{EH}$ で求められ，$\mathrm{AC} = 8$ だから， $\triangle \mathrm{AEC} = 4\mathrm{EH}$

△AEC と△BCE において，AE＝AC＝BC＝BE＝8，EC は共通な辺だから，
3 組の辺がそれぞれ等しいので，△AEC≡△BEC

$\triangle \mathrm{BEC} = \dfrac{1}{2} S$ だから， $\triangle \mathrm{AEC} = \dfrac{1}{2} S$， $\dfrac{1}{2} S = 4\mathrm{EH}$， $\mathrm{EH} = \boldsymbol{\dfrac{1}{8} S}$

問 **2**（**10** 点）灰色の部分は書かなくてよい。

ひし形の対角線はそれぞれの中点で垂直に交わるので，

$\mathrm{OD} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BD} = 6$， $\mathrm{OC} = \sqrt{\mathrm{CD}^2 - \mathrm{OD}^2} = \sqrt{64 - 36} = 2\sqrt{7}$

よって $\mathrm{CE} = 4\sqrt{7}$ となるから，ひし形 $\mathrm{BCDE} = \dfrac{1}{2} \times 12 \times 4\sqrt{7} = 24\sqrt{7}$

点 P から BO に垂線を下ろし交点を Q とする。△ABO において，AO//PQ
となるので，BP：BA＝2：3 より，PQ：AO＝2：3。

（△**AEC** において **AE**＝**AC**，**EO**＝**EC** だから，二等辺三角形の頂角の
二等分線は底辺を垂直に二等分するので，∠**AOC**＝**90**° となる。また，
∠**AOB**＝∠**AOC**＝**90**° となるので，線分 **AO** と平面 **BCDE** は垂直に交
わる。よって **PQ** と平面 **BCDE** も垂直に交わる。）

$\mathrm{AO} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 - \mathrm{OC}^2} = \sqrt{64 - 28} = 6$， $\mathrm{PQ} = 6 \times \dfrac{2}{3} = 4$ となり，

立体 $\mathrm{P - BCDE} = \dfrac{1}{3} \times 24\sqrt{7} \times 4 = \mathbf{32\sqrt{7}\ cm^3}$

問 3（8 点）

問 1 より△AEC≡△BEC なので，AO＝BO となるので，△ABO は直角二等辺三角形となる。$OP=\frac{1}{\sqrt{2}}OA$，　$\triangle AEC=\frac{1}{2}\times EC\times OA=\frac{1}{2}S$

$$\triangle CEP=\frac{1}{2}\times EC\times OP=\frac{1}{2}\times EC\times\frac{1}{\sqrt{2}}OA$$

$$=\frac{1}{2}\times EC\times OA\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}S\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}S}$$

出典：*http://www.hibiya-h.metro.tokyo.jp/SelectedEntrants/TestTheme.html*

【コメント】

S で味付けする問題，大阪府 C でも見ましたね。一瞬混乱しますが，冷静になるとそこまで難しくありません。問 1 は合同な図形を見つけるパズル問題，問 3 は中学生には少し難しいかもしれません。

問 3 類題：https://hokkaimath.jp/blog-entry-285.html【オリジナル】

※日比谷受験生この問題解いておいたら少し有利だったかも。

問 2 は模範解答相変わらず長いですね。何であんなに長いかと言うと，問題文で∠AOB＝90°とは言っているが∠AOC＝90°とは一言も言っていないので，その説明を何らかの形でしなくてはなりません。どう見ても明らかな感じですが，言わなくてはなりません。合同までは書かなくても，垂直に二等分線どうのこうのは書いた方が良いです。と思ったけど，日比谷の模範解答は何の断りもなく，PQ⊥平面 BCDE を利用しているんですよね。ということは，∠AOC＝90°は当たり前なので，灰色の部分は書かなくて良いな。じゃあ模範解答で，何であんなまどろっこしい，合同を用いた解法を書いてあるんだ？