少し捻った等積変形

範囲：関数	難易度：★×4	得点　　　　/18

出典：2018 年度　本郷高校（高校入試）

関数 $y=x^2$ のグラフ上に，A（$-2, 4$），B（$3, 9$），P（$-1, 1$），Q（q, q^2）がある。ただし，$q>0$ であり，直線 AB と直線 PQ は平行ではない。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 三角形 ABP の面積を求めよ。

(2) 点 P を通り，三角形 ABP の面積を二等分する直線の式を求めよ。

(3) 三角形 ABP と三角形 ABQ の面積が等しくなるとき，q の値を求めよ。

【解答例】

（1）（6 点）

＜解法 1＞

直線 AB は，$y = x + 6$なので，点 P を通り AB に平行な直線の式は，

$y = x + 2$となる。C（0, 2）とすると，△ABP＝△ABC（等積変形）

よって，$\triangle \mathrm{ABP} = \triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times (6-2) \times (2+3) = \mathbf{10}$

＜解法 2＞

塾などで教わっているかもしれない例の公式（サラスの公式だとかクロスチョップだとか呼ばれるやつ）

3 点（0, 0）（a, b）（c, d）を結んでできる三角形の面積は， $$\frac{1}{2}\lvert ad - bc \rvert$$ ※｜　｜は絶対地にしろという記号　例：｜765｜＝765，　｜－58｜＝58

A が（0, 0）となるように△ABP を平行移動すると，

A’（0, 0）B’（5, 5），P’（1，－3），△ABP＝△A’B’P’＝**10**

（2）（6 点）

AB の中点は，$\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$となり，P$(-1, 1)$を通るから，傾き$\dfrac{\frac{13}{2}-1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{11}{3}$

$y - 1 = \frac{11}{3}(x+1)$，すなわち，$\boldsymbol{y = \frac{11}{3}x + \frac{14}{3}}$

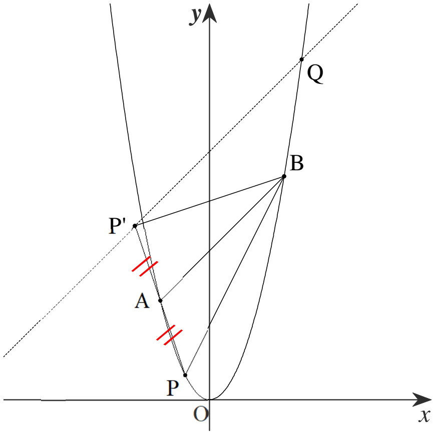
解説読んでも意味不明な人は，

2014 年度洛南高校（（2）まで）：https://hokkaimath.jp/blog-entry-241.html

2021 年度宮城県：https://hokkaimath.jp/blog-entry-222.html

の解説でも読んでおいてください。

（3）（6 点）



AB//PQ ではないので，いつもの点 P を通る AB に平行な直線引いて交点を Q とする典型問題ではない。
別の点 Q を探すために，P を移動させる。

直線 PA 上に PA＝AP’となる点をとる。
PP’の中点が A となるので，
P’（－3, 7）

AB の傾きは 1 なので，点 P’を通り傾き 1 の直線は，$y = x + 10$

$y = x + 10$ と，$y = x^2$の交点の座標は，

$x^2 = x + 10$，$x^2 - x - 10 = 0$，$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{41}}{2}$，$q > 0$ なので，$\boldsymbol{q = \dfrac{1 + \sqrt{41}}{2}}$

【コメント】

高校からの募集を停止した本郷高校の過去問です。（2）までは上位層は余裕で解けてほしいものです。それでも結構間違える人いたみたいですが。

（3）はほんの少し捻っていますが，（2）で薄く誘導されていますし，そんなに難しくないですね。たぶん問題集などで一度は経験してきたでしょう。と言いたいところですが，結構正答率低めでした（本郷 275 名の受験生が解いて 51 名，正答率 18%ぐらい）。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/