接球の断面図		
範囲：空間図形	難易度：★×6	得点　　　　　　/18

出典：2018 年度　本郷高校（高校入試）

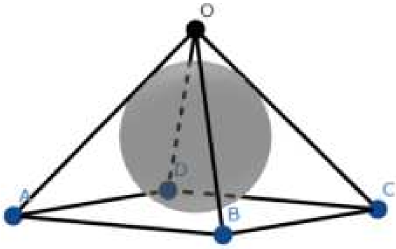
正方形 ABCD を底面にもつ, すべての辺の長さがそれぞれ $2\sqrt{2}$ の正四角錐 OABCD がある。この正四角錐の内部に中心をもつ半径 r の球があり, 底面と辺 OA，OB，OC，OD にそれぞれ接している。このとき，次の問いに答えよ。ただし，円周率を π とする。

（1）球の半径 r の値を求めよ。

（2）球の中心から三角形 OAB にひいた垂線の長さを求めよ。

（3）球が三角形 OAB によって切り取られた断面部分の面積を求めよ。

【解答例】



図形は右図のようになる。

(1)(6 点)

「底面と辺 OA, OB, OC, OD にそれぞれ接している」ことから,

△OAC を切り取ったとき,球の断面図である円は, OA, OC, AC に接している。この円の半径が球の半径となる。

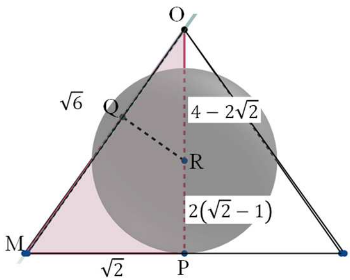
※△OBD でもよい。

AC＝4, OA＝OC＝$2\sqrt{2}$ と分かっているので,

$$\triangle \mathrm{OAC} = \frac{1}{2} \times \left(2\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \left(4\sqrt{2}+4\right) \times r$$

$$r = \frac{8}{4\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{8\left(\sqrt{2}-1\right)}{4\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = \mathbf{2\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

※この有理化の方法は覚えておく



(2)(6 点)

球の中心を R とする。球と正方形 ABCD との接点を P, AB の中点を M, 球の中心から三角形OABにひいた垂線と△OAB との交点を Q とする。OM＝$\sqrt{8-2}=\sqrt{6}$, MP＝$\sqrt{2}$, OR $=4-2\sqrt{2}$

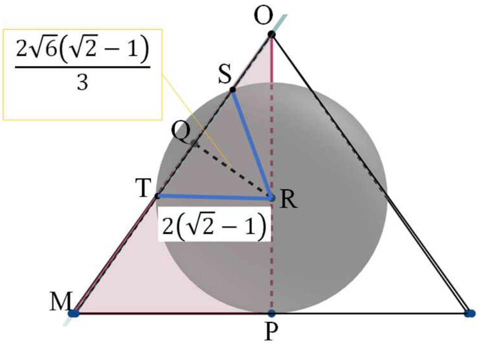
この図形を辺 BC(または辺 AD)の方から見ると,右上図のようになる(ちょっとずれているけど気にしない)。

△OMP∽△ORQ なので, OM:OR＝MP:RQ

$$\mathrm{RQ} = \frac{\sqrt{2}\left(4-2\sqrt{2}\right)}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}\left(4-2\sqrt{2}\right)}{3} = \mathbf{\frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{3}} \left(= \frac{2\sqrt{6}\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}\right)$$

（3）（6 点）

OM と球との交点を S, T とすると，RS＝RT＝r，RQ⊥ST より，断面部分の面積は，$QT^2\pi$ で求められる。



$$QT^2=4\left(\sqrt{2}-1\right)^2-\frac{24}{9}\left(\sqrt{2}-1\right)^2=\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)^2=\frac{4}{3}\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

$$QT^2\pi=\boldsymbol{\frac{12-8\sqrt{2}}{3}\pi}$$

【コメント】

実際に空間図形見たい方は,

https://www.geogebra.org/3d/nwrcznyr

で見てください。点 Q が OM 上にある理由など分かりやすいはず。たぶん。

私立あるあるなのか知りませんが，図が描かれていないので自分で描かなくてはなりません，この時点でハードル高いですね。この問題，空間図形にある程度慣れている方なら余裕で解けますが，大半の中学生は解きもせず投げたでしょう。空間図形なので，図が描かれていても結局は，自分で解答例の図のように，都合の良い図を描かなくてはなりませんが。

地味に計算の工夫も試されます。(3）は QT ではなく，QT^2 が分かればよいのと，$\sqrt{2}-1$ をくくり出せれば計算が簡単です。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/