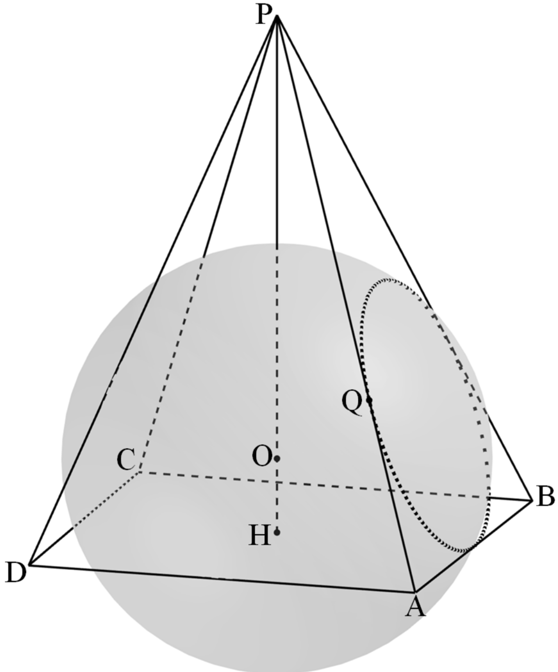
正四角錐の辺に接する球		
範囲：空間図形	難易度：★×5	得点　　　　/20

出典：2020 年度　久留米大附設高校

右図のような正四角錐 P-ABCD があり，すべての辺は球面 S に接している。球面 S の中心 O は，頂点 P から底面 ABCD に引いた垂線 PH 上にある。辺 PA と球面 S の接点を Q とする。

球面 S の半径が 1, OH の長さが $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき，次の各問に答えよ。



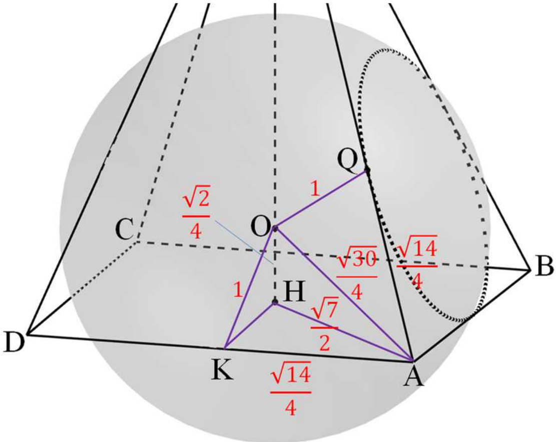
（1）線分 AH の長さを求めよ。

（2）線分 OA，QA の長さをそれぞれ求めよ。

（3）線分 PO，PQ の長さをそれぞれ x，y とする。x，y の値を求めよ。

（4）二等辺三角形 PAB の内接円の半径 r を求めよ。

【解答例】



(1)（4 点）

辺 AD 上に∠HKA＝90° となる点 K をとる。

（すべての辺は球面 S に接しているので,）OK＝1，OH＝$\frac{\sqrt{2}}{4}$

HK＝$\sqrt{1-\frac{2}{16}}=\frac{\sqrt{14}}{4}$，　△HKA は直角二等辺三角形なので,

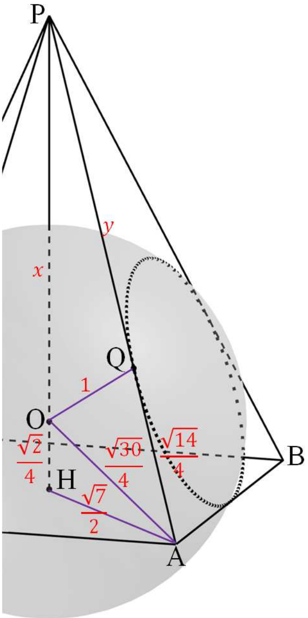
$\mathrm{AH}=\sqrt{2}\mathrm{HK}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}}$

(2)（3 点×2）

$\mathrm{OA}=\sqrt{\frac{2}{16}+\frac{7}{4}}=\sqrt{\frac{30}{16}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{30}}{4}}$

（すべての辺は球面 S に接しているので,）OQ＝1，∠OQA＝90°

$\mathrm{QA}=\sqrt{\frac{30}{16}-1}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{14}}{4}}$



（3）（3 点×2）

△PQO∽△PHA より，

$$\begin{cases}\left(y+\dfrac{\sqrt{14}}{4}\right):\dfrac{\sqrt{7}}{2}=x:1\cdots①\\\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right):\dfrac{\sqrt{7}}{2}=y:1\cdots②\end{cases}$$

①より，$y=\dfrac{\sqrt{7}}{2}x-\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

②に代入して，

$$\frac{\sqrt{7}}{2}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x-\frac{\sqrt{14}}{4}\right)=x+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{7}{4}x-\frac{7\sqrt{2}}{8}=x+\frac{\sqrt{2}}{4},\quad \boldsymbol{x=\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

$$y=\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{14}}{2}}$$

（4）（4 点）

AB と内接円の接点を L，中心を O’とする。

$\mathrm{PA}=\dfrac{3\sqrt{14}}{4}$，$\mathrm{AL}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$なので，PA：AL：PL＝3：1：$2\sqrt{2}$

△PAL∽△PO’Q なので，PQ：QO’＝$2\sqrt{2}$：1

$r=\mathrm{QO'}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{14}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{4}}$　※内接円の半径の求め方は色々あります。

【コメント】

∠OQA＝90°が納得いかない場合は，Geogebra の https://www.geogebra.org/calculator/ftgjtvsx でも見ておいてください。見づらいですが，ただの接線と半径です。誘導はかなり丁寧ですが，それでも難しいでしょう。（2）の QA は計算するのに勇気がいりますし，（3）は中学生には結構キツメの連立方程式ですね。（4）は（3）まで解けた人へのプレゼントです，簡単。

（3）別解　中学生らしいかもしれないし，思いつきにくいかも

登場する三角形が全て直角三角形なので，面積比で考える。

△PQO∽△PHA，相似比 2：$\sqrt{7}$となるから，面積比は 4：7

よって，△PQO：四角形 OHAQ＝4：3

$\triangle$ PQO＝$\frac{1}{2}y$，四角形 OHAQ＝$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{14}}{4}\times 1\right)$だから，

$y=\frac{4}{3}\times\left(\frac{\sqrt{14}}{8}+\frac{\sqrt{14}}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{\sqrt{14}}{2}}$

$\triangle$ OHA $=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}$，　$\triangle$ OAQ $=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{14}}{4}\times 1$ より，

$\triangle$ OHA：$\triangle$ OAQ＝1：2

$\triangle$ OHA：$\triangle$ OAQ：$\triangle$ POQ＝1：2：4

となるから，△AOP：△AOH＝6：1 より，

$x=6\mathrm{OH}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$