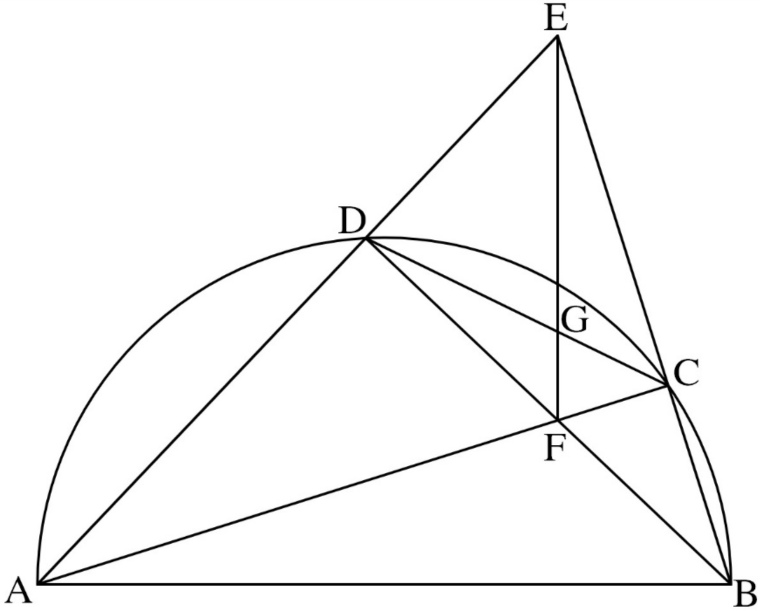
見えざる相似		
範囲：中 3 図形	難易度：★★★★★+	得点　　　　　/9

出典：2020 年度　大分県

下の図のように，線分 AB を直径とする半円の弧の上に点 C，D をとり，直線 AD と直線 BC の交点を E とする。また，線分 BD と線分 AC の交点を F とし，線分 EF と，線分 CD の交点を G とする。次の（1)，(2）の問いに答えなさい。

（図）



（1）△ADF∽△BCF を証明しなさい。

（2）AD＝5 cm，DE＝3 cm，BC＝2 cm とする。

①，線分 CE の長さを求めなさい。

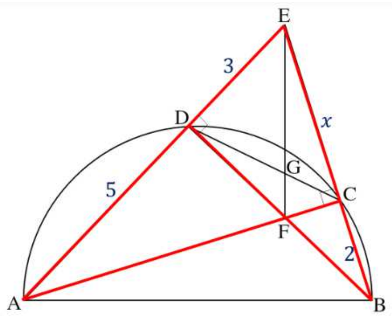
②，線分 EG の長さを求めなさい。

【解答例】

(1)(3 点)

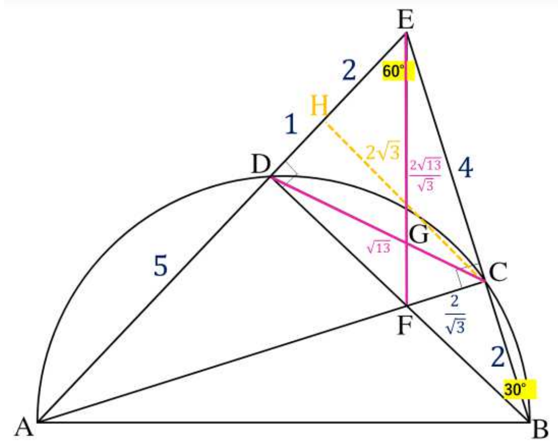
△ADF と△BCF において,
AB 直径で,$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいから, ∠ADF＝∠BCF＝90°
$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角は等しいから, ∠DAF＝∠CBF
2 組の角がそれぞれ等しいので, △ADF∽△BCF

(2)①(3 点)



EC＝x と置く。
∠EAC＝∠EBD, ∠ECA＝∠EDB＝90°
なので, △EAC∽△EBD
よって, EA：EC＝EB：ED
$8 : x = (x+2) : 3$
$x^2 + 2x - 24 = 0 \quad (x+6)(x-4) = 0$
$x > 0$ より, $x = 4$ **EC = 4 cm**

（2）②（3 点）



△BED において，BE＝6，ED＝3，∠BDE＝90° なので，∠BED＝60°，∠EBD＝60° となる。

よって，$\mathrm{CF}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ となるから，$\mathrm{EF}=\sqrt{16+\dfrac{4}{3}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$

点 C から DE に垂線を下すと，CH＝$2\sqrt{3}$，DH＝1 となるので，CD＝$\sqrt{13}$

【解答例 1】

<u>∠EDF＝∠ECF＝90° なので，4 点 C，E，D，F は，EF を直径とする同一円周上にある。</u>

よって，△GED∽△GCF であるから，$\mathrm{ED}:\mathrm{CF}=3:\dfrac{2}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}:2$ なので

$\mathrm{GE}=3\sqrt{3}x$ と置くと $\mathrm{GC}=2x$，$\mathrm{GD}=3\sqrt{3}y$ と置くと $\mathrm{GF}=2y$ となるので，

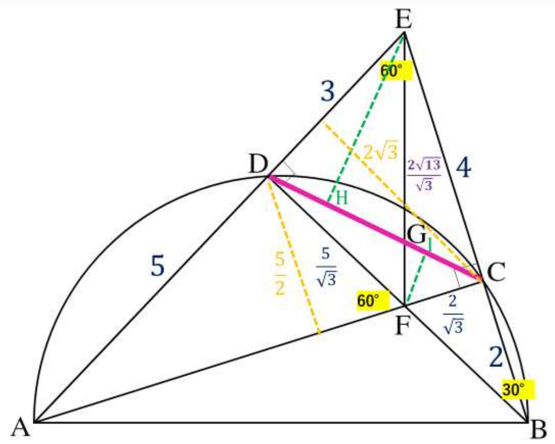
$$\begin{cases}3\sqrt{3}x+2y=\dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\cdots①\\ 2x+3\sqrt{3}y=\sqrt{13}\ \cdots②\end{cases}$$

①×$3\sqrt{3}$，②×2 より，

$$\begin{cases}27x+6\sqrt{3}y=6\sqrt{13}\\ 4x+6\sqrt{3}y=2\sqrt{13}\end{cases}\qquad 23x=4\sqrt{13}\qquad x=\frac{4\sqrt{13}}{23}$$

よって，$\mathrm{EG}=3\sqrt{3}x=3\sqrt{3}\times\dfrac{4\sqrt{13}}{23}=\boldsymbol{\dfrac{12\sqrt{39}}{23}}$ **cm**

【解答例 2】



$\triangle EDC=\frac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$　$\triangle FDC=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$

底辺 DC が共通だから，面積比は高さの比となるので，高さを EH，FI とすると，$EH:FI=3:\frac{5}{6}=18:5$　$\triangle EHG\backsim\triangle FIG$ だから，$EG:FG=18:5$

<u>∠EDF＝∠ECF＝90°　なので，4 点 C，E，D，F は，EF を直径とする同一円周上にある。</u>

よって，$\triangle GED\backsim\triangle GCF$ であるから，$EG=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\times\frac{18}{23}=$ **$\frac{12\sqrt{39}}{23}$ cm**

【コメント】

相似が見えづらい所にあります。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/