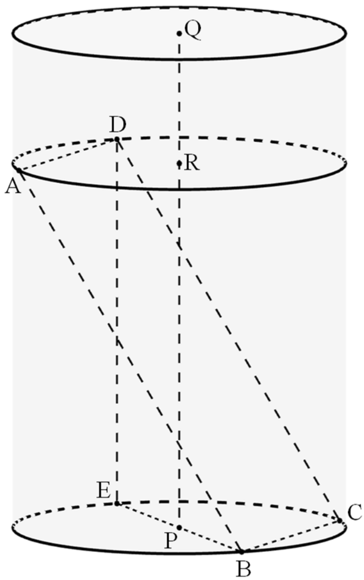
芸術的な難問高校入試第９２回		
美しさ：★×5	難易度：★×7	得点：　　　/20

出典：2011 年度　大阪府 B　後期

図Ⅰ～図Ⅲの立体は，点 P を中心とする半径 3 cm の円 P と点 Q を中心とする半径 3 cm の円 Q を底面とし，高さが 9 cm の円柱である。直線 PQ は底面に垂直である。円周率を π として，次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。



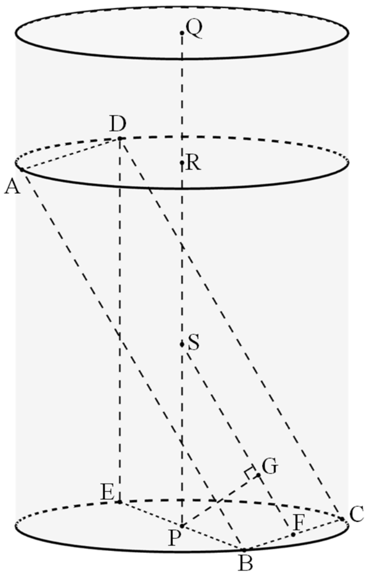
(1) 図Ⅰ，図Ⅱにおいて，R は線分 PQ 上にあって，P, Q と異なる点である。点 R を中心とする円 R は半径が 3 cm であり，円 R をふくむ平面は円柱の底面と平行である。四角形 ABCD は，AB＝DC＝8 cm, BC＝AD＝4 cm の長方形である。B,C は，円 P の周上にあって，A, D は円 R の周上にある。S は，長方形 ABCD の対称の中心であり，線分 PQ 上にある。E は，D を通り直線 PQ に平行な直線と円 P との交点である。B と E とを結ぶ。このとき，直線 DE は円 P をふくむ平面と垂直であり，線分 BE は円 P の直径である。

① 図Ⅰにおいて，

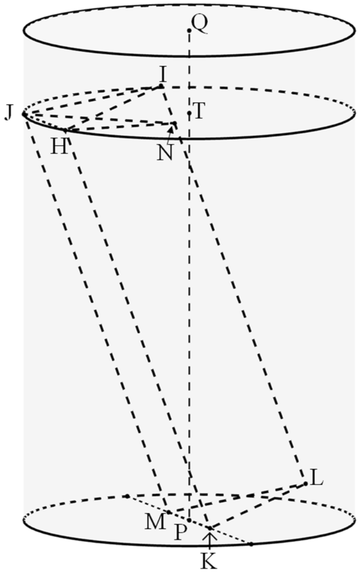
(ア)円 P と円 Q を底面とする円柱の表面積を求めなさい。

(イ)線分 DE の長さを求めなさい。求め方をも書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

② 図Ⅱにおいて，F は，辺 BC の中点である。S と F とを結ぶ。G は，P から線分 SF にひいた垂線と線分 SF との交点である。線分 PG の長さを求めなさい。



(2) 図Ⅲにおいて，T は線分 PQ 上にあって，P，Q と異なる点である。点 T を中心とする円 T は半径が 3 cm であり，円 T をふくむ平面は円柱の底面と平行である。立体 HIJ-KLM は三角柱である。△HIJ は，∠JHI＝90°，HJ＝HI＝2 cm の直角二等辺形である。△HIJ≡△KLM である。四角形 HKLI，JMLI，JMKH はすべて長方形であって，
長方形 HKLI≡長方形 JMKH である。HK＝8 cm である。K，M は円 P の直径上にあって，KP＝MP である。H，J は，円 T の周上にある。このとき，平面 HKLI は円柱の底面に垂直である。N は，円 T をふくむ平面と辺 IL との交点である。N と H，N と J とをそれぞれ結ぶ。このとき，△JHN は，∠JHN＝90° の直角三角形である。三角すい I-JHN の体積を求めなさい。



【解答例】

（1）①（ア）（3 点）

72π cm²　※これ解けないようじゃこんなプリント解いている場合じゃない。

（1）①（イ）（8 点）

$\triangle$ ABD において，$DB^2 = AB^2 + AD^2 = 80$

$\triangle$ DEB において，$DE = \sqrt{DB^2 - EB^2} = \mathbf{2\sqrt{11}}$ **cm**

（1）②（4 点）

△PBC は PB＝PC の二等辺三角形であるから，PF= $\sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

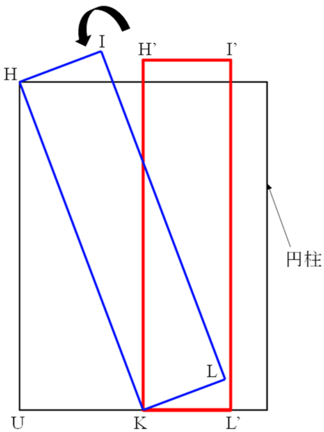
$SP = \frac{1}{2}RP = \frac{1}{2}DE = \sqrt{11}$，　$\triangle SPF = \frac{\sqrt{55}}{2}$

$\triangle$ SPF において，$SF = \sqrt{5+11} = 4$，　$\frac{1}{2} \times 4 \times PQ = \frac{\sqrt{55}}{2}$，　$\mathbf{PQ = \frac{\sqrt{55}}{4}}$ **cm**

（2）（5 点）

Point

三角柱を，MK を軸に，J と H が円柱に接するまで回転させたと考える！



・立体 HIJ-KLM は三角柱

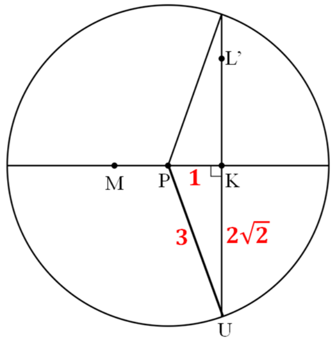
・平面 HKLI は円柱の底面に垂直である

・K，M は円 P の直径上にあって，H，J は，
円 T の周上にある。

であることから，回転させたと考えられる，その方が分かりやすい，たぶん。

1，四角形 HKLI を通る平面で考える

左図のように，四角形 HKLI と，回転前の四角形 H’KL’I’と，(四角形 HKLI を通る平面で切断した)円柱の断面図を考える。この図での KU の長さは，

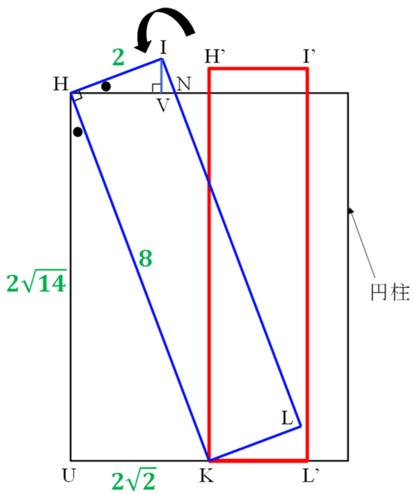


円 P において，

（∠JHI＝∠MKL＝90°　より，∠MKL'も 90°
である）

△PKU において三平方の定理より，

KU＝$2\sqrt{2}$



よって，HU＝$2\sqrt{14}$となる。

左図で，△HUK∽△HVI，

△HUK∽△HIN であることを利用し，

$$IV = 2\sqrt{2} \times \frac{2}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$HN = 8 \times \frac{2}{2\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{14}}{7}$$

△JHN は，∠JHN＝90°　の直角三角形で
あるので，三角すい I-JHN の体積は，

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4\sqrt{14}}{7} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8\sqrt{7}}{42} = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{7}}{21}\ \mathrm{cm}^3}$$

【コメント】

類題？2021 年度宮崎県：https://hokkaimath.jp/blog-entry-269.html　宮崎のは「回転させました」と書いてあるから，まだマシかも。

（2）は正答率 0.0%だったらしいです。問題文長くて嫌になりますし，自分で回転させて↑のような図を描くの，時間内には無理でしょ。良い問題ではあるので，頭の体操に一度解くのは良いかもしれませんが，本番は捨て問です。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/