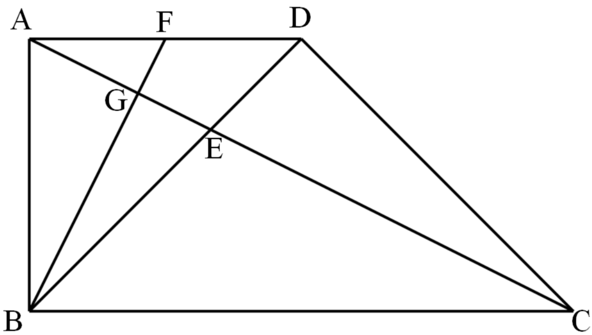
書きづらい証明		
範囲：証明	難易度：★×5	得点　　　　/14

出典：2011 年度　同志社高校　改題

AD//BC である台形 ABCD において，AB＝AD＝a，BC＝2a，∠ABC＝90°とする。AC と BD の交点を E とし，さらに，AD の中点を F，AC と BF の交点を G とする。次の問いに答えよ。



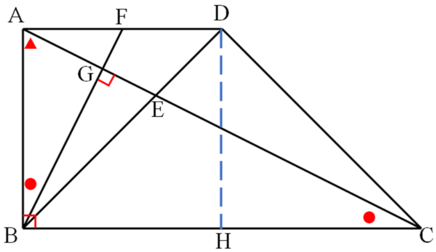
（1）△EBG∽△ECD であることを証明せよ。

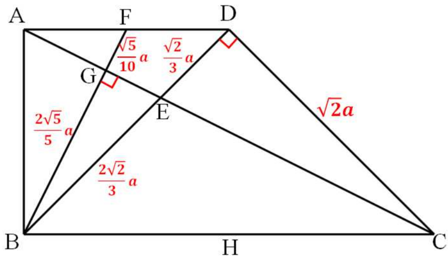
（2）GE の長さを求めよ。

【解答例】

（1）（8 点）**Point ∠EGB＝90° を証明するために遠回りする。**

△ABF と△BCA において，
AF：AB＝BA：BC＝1：2，
(AD//BC より平行線の同位角は等しいから)∠BAF＝∠CBA＝90°，
２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから△ABF∽△BCA
よって，∠ABF＝∠BCA
△EBG と△ECD において，
∠EGB＝∠ABF＋∠CAB＝∠BCA＋∠CAB＝90°
（∠DHC＝90° となる点 H を辺 BC 上にとると，△HBD と△HCD は直角二等辺三角形となるから,）∠EDC＝45° ＋45° ＝90°
よって，∠EGB＝∠EDC＝90° …①
対頂角は等しいから，∠BEG＝∠CED…②
①，②より 2 組の角がそれぞれ等しいから，△EBG∽△ECD





（2）（6 点）

$\mathrm{BE:ED} = 2:1$，$\mathrm{BD} = \sqrt{2}a$より，$\mathrm{DE} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a$

$$\mathrm{BF} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\,a = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$\triangle \mathrm{AFG} \backsim \triangle \mathrm{CBG}$ より，$\mathrm{FG:BG} = 1:4$ だから，$\mathrm{BG} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$

$\triangle \mathrm{EBG} \backsim \triangle \mathrm{ECD}$，$\mathrm{BG:CD} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} : \sqrt{2} = \mathrm{EG} : \dfrac{\sqrt{2}}{3}a$より，$\boldsymbol{\mathrm{EG} = \dfrac{2\sqrt{5}}{15}a}$

（**2**）別解

AG：GC＝1：4＝3：12，AE：EC＝1：2＝5：10 より，

AC：GE＝15：(5－3)＝15：2

$AC = \sqrt{1^2 + 2^2}a = \sqrt{5}a$ より，$\mathbf{GE = \frac{2\sqrt{5}}{15}a}$

【コメント】

元の問題は BC＝2a ではなく「BE：ED＝2：1」と書かれてあり，さらに証明が長くなっていたので，改題しておきました。

それにしても中々書きづらい証明だと思われます。分かってはいるんだけど……厳しい。(2) はよくある問題ですが，a と置かれていることで，中学生には想像以上に厳しそう。