

直角二等辺三角形と関数

範囲：関数・三平方

難易度：★×6

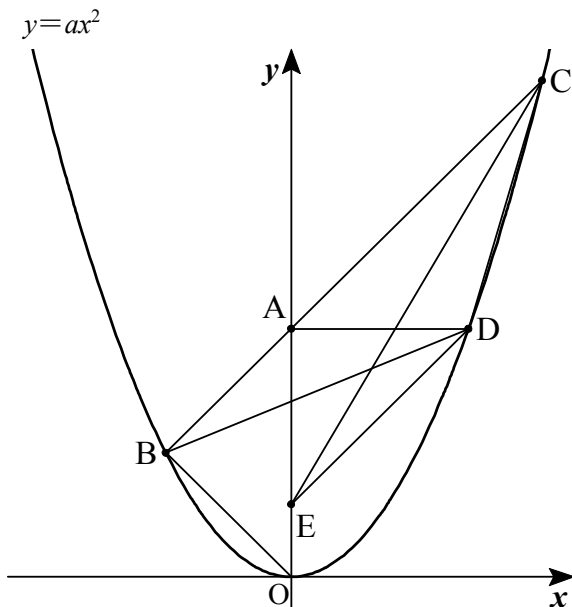
得点

/25

出典：2022 年度 慶應義塾女子高校

※途中の計算や式なども解答欄に書く形式

図のように、点 A (0, 4) を通る直線と放物線 $y=ax^2$ の 2 つ交点を B, C とすると、 $\triangle OAB$ は線分 OA を斜辺とする直角二等辺三角形になる。点 A を通る x 軸と平行な直線と放物線の交点を D とし、線分 OA 上に点 E を $\angle ADB = \angle BDE$ となるようにとる。点 B の x 座標を負として、次の問いに答えなさい。



- (1) 2 点 B, D の座標および定数 a の値を求めなさい。
- (2) 点 C の座標を求めなさい。
- (3) 線分 AB の長さと、 $\angle ABD$ の大きさを求めなさい。
- (4) $\triangle CED$ の面積 S を求めなさい。

【解答例】**(1) (3 点×3)**

△OAB は直角二等辺三角形なので、図より、**B(-2, 2)**

$2 = 4a$ より、 **$a = \frac{1}{2}$** 、点 D の y 座標は 4 で、x 座標は正なので、**D(2√2, 4)**

(2) (4 点)

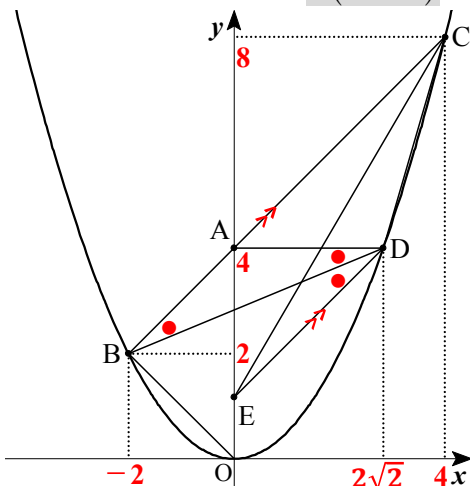
直線 AB の式は、

傾きが $\frac{4-2}{-2} = 1$ なので、 $y = x + 4$

$y = x + 4$ と、 $y = \frac{1}{2}x^2$ を連立し、

$x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x - 4)(x + 2) = 0$

$x > 0$ より、 $x = 4$, **C(4, 8)**

**(3) (4 点×2)**

△OAB は直角二等辺三角形なので、

AB = 2√2

△ABD は二等辺三角形となるから、 $\angle ABD = \angle ADB$

$\angle ADB = \angle BDE$ なので、 $\angle ABD = \angle BDE$

錯角が等しくなるので、AB//DE、したがって $\angle ADE = 45^\circ$ となるから、

$\angle ABD = \angle ADB = \angle BDE = \mathbf{22.5^\circ}$

(4) (4 点)

AB//DE より、 $\triangle CED = \triangle AED$ となる。△AED は直角二等辺三角形なので、

$\triangle CED = \triangle AED = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2})^2 = \mathbf{4}$

※ (2)

AB の傾き 1 より、点 C の x 座標を c としたとき、 $\frac{1}{2}(-2+c)=1$

$c=4$ としてもよいが、記述式だから避けた方が無難？

※ (3)

AB の傾きが 1 なので、DE の傾きも 1 となる。傾きが 1 だと、直線と x 軸のなす角は 45° となる。 30° , 45° , 60° くらいなら公立高校入試でも平気で出題される。関数で角度求めさせる問題は(たぶん) 30° , 45° , 60° に関連する問題しか出せない。

【コメント】

解答用紙にはどのくらい書けば良いんでしょうかね。部分点あげるための途中計算でしょうから、そこまで厳密に書かなくても良いはず。

解答見れば簡単ですが、中々求められる知識が多くてしんどいと思われます。(3)、最初どうせ 22.5° だろうなとは思っていましたが、その根拠を探すのに戸惑いました。最初は内角の二等分線公式を用いていましたが、そんなことしなくても、AB//DE で一発です。ただ中学生が思いつくのは結構しんどそう。高校生は $\tan$ を使って泥沼にハマりそうです。AB//DE に気づいていれば、(4) もサラスの公式なんて使わず等積変形で一発です。中々練られた問題ですね。

ちなみに、元の慶應女子の問題用紙は、かなり図が意地悪でした。点 B と点 E の y 座標がほぼ同じに見えて、 $\triangle ADE$ が全く直角二等辺三角形に見えないという。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>