

脱法問題③

範囲：中3 図形？

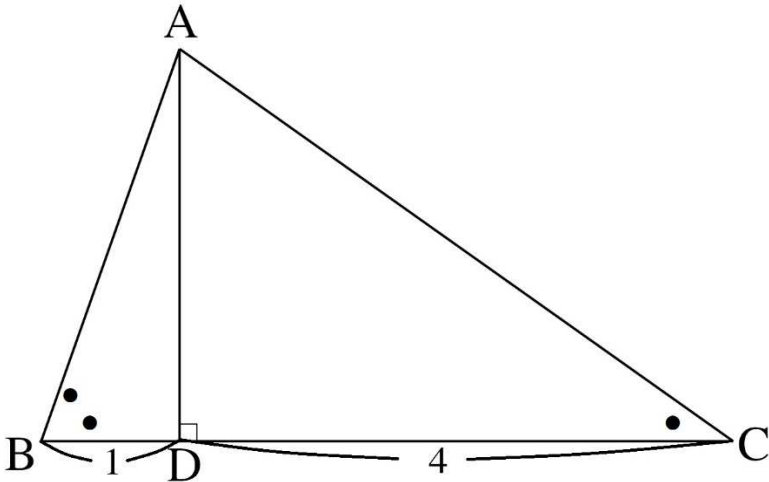
難易度：?????

得点

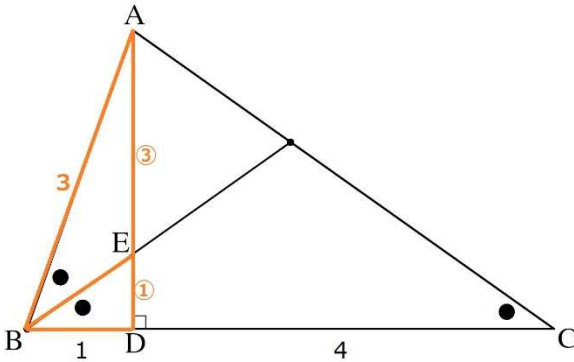
/3

出典：いつかの灘高校（高校入試）らしい

下の図のように、 $2\angle C = \angle B$ である $\triangle ABC$ がある。点 A から辺 BC に垂線を下ろし、交点を下すと、 $BD=1$ 、 $DC=4$ となった。 AC の長さを求めなさい。



【中学生の解法】



$\angle B$ の二等分線を引き、
AD との交点を E とする。
2 組の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle EDB \sim \triangle ADC$
であるから、
 $DB : DC = ED : AD = 1 : 4$ 、
すなわち、 $DE : EA = 1 : 3$
となる。

ここで、BE は、 $\angle ABD$ の二等分線であるから、 $BD : BA = DE : EA = 1 : 3$
となる。よって、 $AB = 3$ 。

$$AD = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}, \quad AC = \sqrt{8 + 4^2} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

【高校生の解法】

$\angle ACB = \theta$ と置くと、 $\angle ABC = 2\theta$ であり、 $3\theta < \pi$ より、 $\theta < \frac{\pi}{3}$

$\triangle ABD$ において、 $AD = \tan 2\theta$ (※)、 $\triangle ACD$ において、 $AD = 4 \tan \theta$
であるから、 $\tan 2\theta = 4 \tan \theta$

$$\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = 4 \tan \theta \quad 0 < \tan \theta < \sqrt{3} \text{ より}, \quad 1 = 2 - \tan^2 \theta \quad \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって、 $AD = \frac{4}{\sqrt{2}}$ であるから、 $AC = \sqrt{16 + \frac{16}{2}} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$

※ $AB \cos 2\theta = 1$ より、 $AB = \frac{1}{\cos 2\theta}$ 、 $AD = AB \sin 2\theta = \tan 2\theta$

【コメント】 高校数学は、才能が不要です。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>