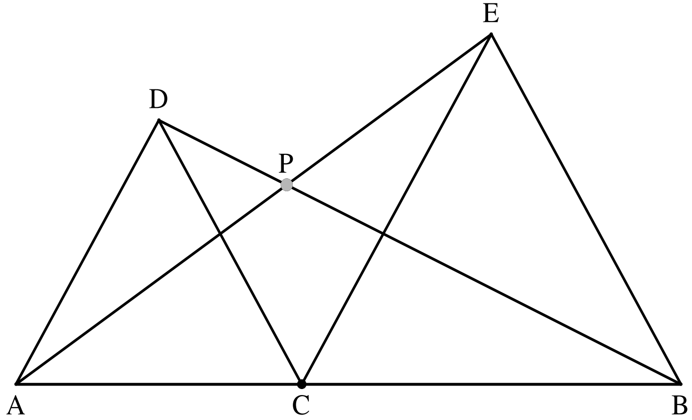
正三角形と点Ｐの軌跡		
範囲：中 3 図形	難易度：★★★★☆	得点　　　　　/12

出典：1981 年度　岡山県

下の図のように，線分 AB 上に点 C をとり，AC，CB を，それぞれ 1 辺とする正三角形△ACD と△CBE を AB の同じ側に作ります。AE と BD との交点を P，AB＝1 cm とします。次の問いに答えなさい。

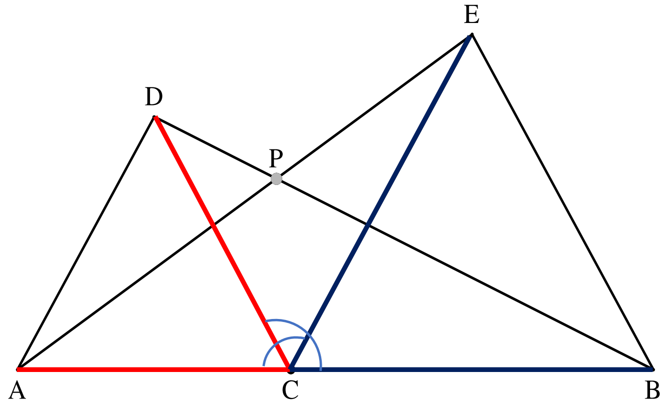


問 1　△ACE≡△DCB を証明しなさい。

問 2　点 C が，線分 AB 上を A から B まで動くとき，点 P が動いてできる線分の長さを求めなさい。

【解答例】

問 **1**（**6** 点）



△ACE と△DCB において，

仮定より（正三角形の 3 本の辺の長さが全て等しいので），

AC＝DC…①　CE＝CB…②

正三角形の 1 つの内角の大きさは 60°だから，∠ACD＝∠BCE＝60°

∠ACE＝180°－∠BCE　∠DCB＝180°－∠ACD

したがって，∠ACE＝∠DCB…③

①，②，③より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，

△ACE≡△DCB

【類題】

・正三角形系の類題

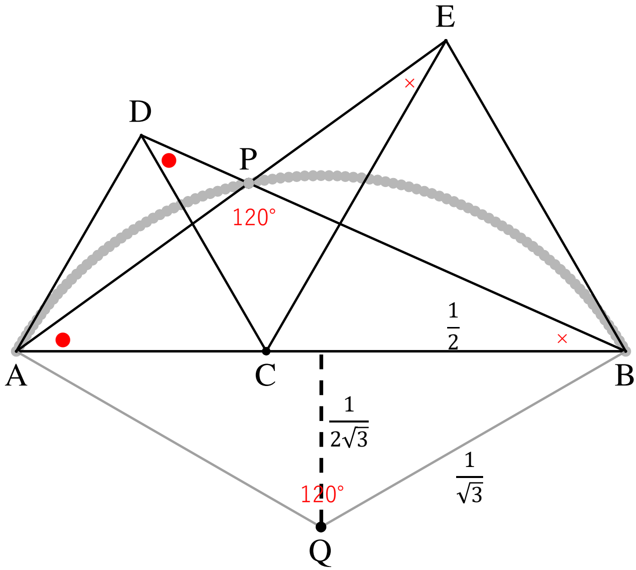
2015 年度長野県　https://hokkaimath.jp/blog-entry-96.html

・円周角と軌跡の類題

2011 年度茨城県（易しい）https://hokkaimath.jp/blog-entry-242.html

2017 年度北海道（やや難）https://hokkaimath.jp/blog-entry-25.html

問 2（6 点）



△ACE≡△DCB なので，∠PAB＋∠PBA＝60° となるから，∠APB は常に 120° となる。よって点 P が描く線は円弧となる。

円の中心を Q とすると，図より，$QB=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$cm だから，求める線の長さは

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\pi\times\frac{120}{360}=\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi\ \mathrm{cm}}$$

【コメント】

今年作成の予想問題に，問 2 だけを入れようとしていましたが，辞めました。角度が常に同じ→円周角→円弧を閃く問題は，昔から出ていることが分かる問題です。前問で証明などの問題があると露骨で気づきやすいですが，何もないと気づきづらい！？