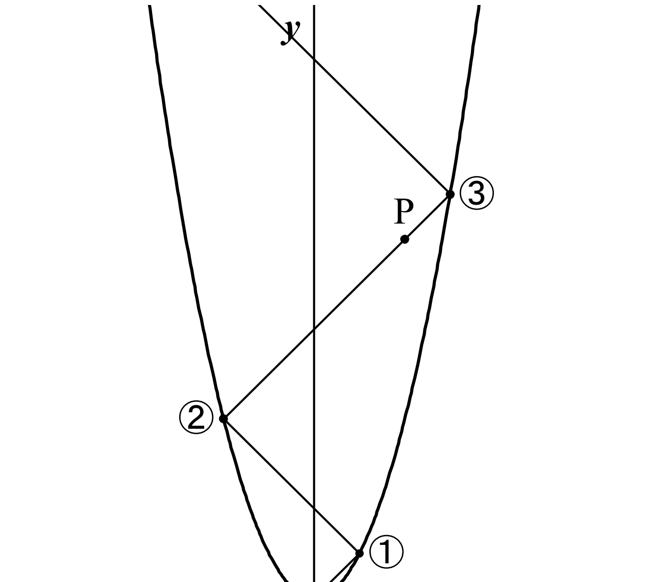
規則性と関数		
範囲：中 3 関数図形	難易度：★★★★★	得点　　　　　/10

出典：2011 年度　筑波大学附属駒場中・高等学校　（高校入試）

図のように，関数 $y=x^2$ のグラフと，原点 O から始まる折れ線があります。図の①，②，③，……は，折れ線と $y=x^2$ のグラフの交点で，折れ線をつくる各線分の傾きは，順に 1，－1，1，－1，1，……です。点 P は O を出発し，折れ線上を毎秒 1 cm の速さで進みます。次の問いに答えなさい。ただし，座標の 1 目盛りを 1 cm とします。



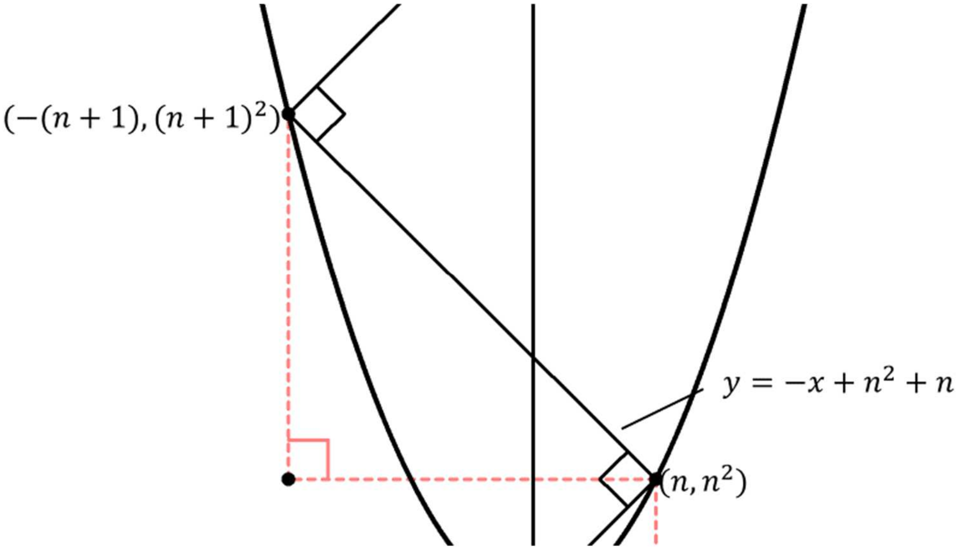
（1）P が点③に到着するのは，出発してから何秒後ですか。

（2）（O①②），（①②③），（②③④），……のように，折れ線上の連続した 3 点を頂点とする三角形を考えると，その面積が 195 cm^2 になることがあります。そのときの頂点を，上のように書きなさい。

（3）出発してから 100 秒後の P の座標を求めなさい。

【解答解説】

n 番目の座標を（n, n^2）と表す。n 番目と $n+1$ 番目を結ぶ直線の式は，下の図のように傾き－1 となり，$y=-(x-n)+n^2$となるから，$y=x^2$との交点は，$x^2=-x+n^2+n$　$x^2+x-n(n+1)=0$　$(x-n)(x+n+1)=0$
となり，$x=n,-(n+1)$となる。
よって，$n+1$ 番目の座標は（$-(n+1), (n+1)^2$）

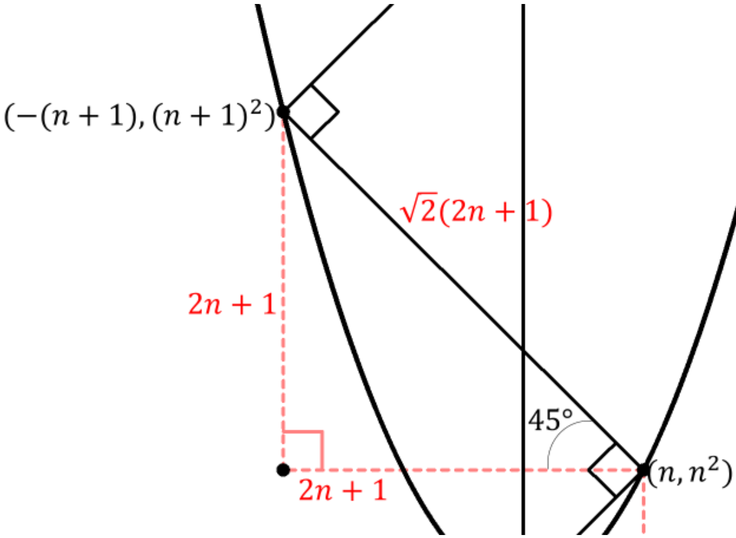


同様に計算すると, n 番目と $n+1$ 番目を結ぶ直線の式の傾きが 1 の場合は,
n 番目の座標は（$-n, n^2$），$n+1$ 番目の座標は（$(n+1), (n+1)^2$）となる。
上記のように真面目にやらなくても，色々実験すれば「n 番目の y 座標は n^2 だ」と気づいて解き進めるのもアリ。

※実験とは　O（0, 0）①（1, 1）②（－2, 4）③（3, 9）④（－4, 16）……と
　具体的に座標を何とか出していくこと。頑張って。

（1）（4 点）

③（3，9）となる。図のように，n 番目と $n+1$ 番目の点を結ぶ線分の長さは，$\sqrt{2}(2n+1)$となるから，③までに合計$\sqrt{2}+3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=9\sqrt{2}$進む。



よって，出発してから，**$9\sqrt{2}$秒後**

※x 軸に平行な直線と，傾き 1 または－1 の直線のなす角の大きさは 45°である。

※傾き 1 と－1 の直線のなす角の大きさは，（傾き同士をかけると－1 になるので）90°である。詳しくはぐぐったり参考書。

（2）（3 点）

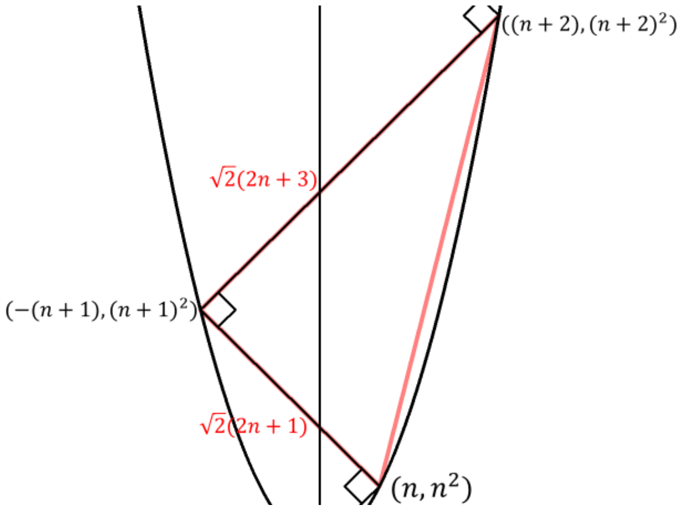
（$\boxed{n}\ \boxed{n+1}\ \boxed{n+2}$）の面積は,

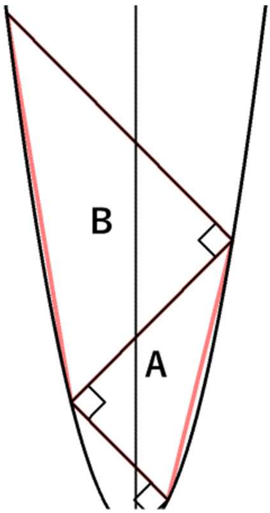
$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}(2n+1)\times\sqrt{2}(2n+3)=(2n+1)(2n+3)$と表される。

これが 195 となるから，$4n^2+8n+3=195\quad 4n^2+8n-192=0$

$n^2+2n-48=0\quad(n+8)(n-6)=0\quad n=-8,6$

$n>0$ より，（⑥⑦⑧）





※（$\boxed{n}\ \boxed{n+1}\ \boxed{n+2}$）の面積を，A の三角形で考えようが，B の三角形で考えようが，結局長さ，面積は同じである。

（3）（3 点）

（解法 1）

1 秒進むと，y 座標は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 増えるから，100 秒後の y 座標は$50\sqrt{2}$である。

$50\sqrt{2} \approx 70.7$ なので，x座標は，-8 に，$50\sqrt{2}-64$ を足したものとなる。

$-8+50\sqrt{2}-64=50\sqrt{2}-72$　$\boldsymbol{\left(50\sqrt{2}-72, 50\sqrt{2}\right)}$

（解法 2）

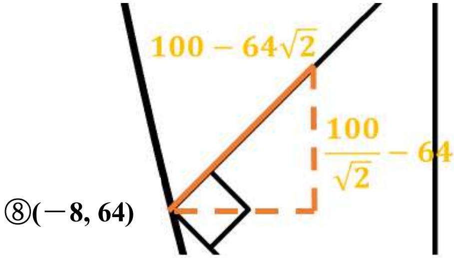
100 cm 進むには,

$\sqrt{2}+\cdots\cdots+15\sqrt{2}=64\sqrt{2} \cong 91$

$\sqrt{2}+\cdots\cdots+15\sqrt{2}+17\sqrt{2}$

$=81\sqrt{2} \cong 114$

であるから，⑧と⑨の間にある。



⑧から$100-64\sqrt{2}$ cm 進めばよいので,

$\dfrac{100}{\sqrt{2}}-64=50\sqrt{2}-64$　これを⑧（$-8, 64$）の各座標に足せばよいから,

100 秒後の座標は，$\boldsymbol{\left(50\sqrt{2}-72, 50\sqrt{2}\right)}$

【コメント】

　やたら長々と書いていますが,

・n 番目の y 座標は n^2

・45°，90°がたくさんでき，直角二等辺三角形のオンパレード

と気づければ，そこまで難しくありません。

　とはいえ，北海道の学習塾の「裁量問題対策」とか謳っている問題集に載っていたときはドン引きしました。北海道ではオーバーワークです。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/