

キセル算（部分分数分解）

範囲：計算問題

難易度：★×4

得点

/24

出典：2018 年度 早稲田大学本庄高校

次の各問に答えよ。

問 1 $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{\sqrt{12}}$ を計算せよ。

問 2 $a^2 + b^2 - 2ab - 2a + 2b - 15$ を因数分解せよ。

問 3 8^{2018} の一の位の数を求めよ。

問 4 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \frac{1}{8 \times 9}$

の値を求めよ。

【解答例】**問 1 (6 点)**

$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{\sqrt{12}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 5\}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{2}(2 + 2\sqrt{6} + 3 - 5)}{\sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{12}}{\sqrt{12}} = 2$$

問 2 (6 点)

$$a^2 + b^2 - 2ab - 2a + 2b - 15 = (a - b)^2 - 2(a - b) - 15 = (a - b - 5)(a - b + 3)$$

問 3 (6 点)

8^n の一の位だけを考える。 $8^1=8$, $8^2=64$ だから一の位は 4, $8^3=64 \times 8$ だから一の位は 2, 8^4 は, 8^3 (一の位 2) $\times 8$ だから一の位は 6, 8^5 一の位が 8.....となる。 $2018 \div 4 = 504$ あまり 2 なので, 8^{2018} の一の位は **4**

n	1	2	3	4	5	6	...
一の位	8	4	2	6	8	4	...

問 4 (6 点)

Point 中学受験では常識らしいキセル算 (高校数学では部分分数分解)

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \text{ となる } a, b \text{ を考えると, } \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1) + bn}{n(n+1)}$$

となるから, 係数を比較して, $a = 1$, $b = -1$

よって, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ だから,

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \frac{1}{8 \times 9}$$

$$= \frac{1}{1} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

【コメント】

問3まではあまりにもありふれた問題ですね。計算ミス気をつけてください。私は最初、 $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 6 + 2\sqrt{6}$ というとんでもない間違いを犯しました。

問4は中学入試と大学入試では常識の「キセル算(部分分数分解)」です。なぜか間の高校入試だけでは常識ではありません、不思議。知らないと解けませんね。初見では無理。たぶん覚えておいて損はない。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>