高校生が解く問題やん……		
範囲：小問集合	難易度：？？？？？	得点　　/20

出典：2014 年度開成高校（高校入試）

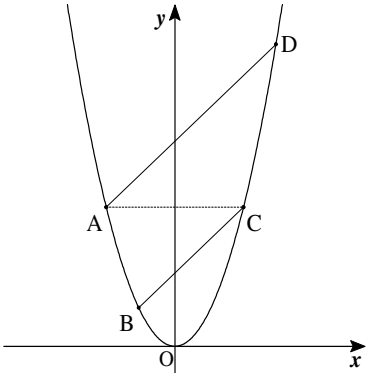
次の各問いに答えよ。ただし，(1) は結果のみを記すこと。

(1) $x^3+(5y+1)x^2+(6y+5)xy+6y^2$ を因数分解せよ。

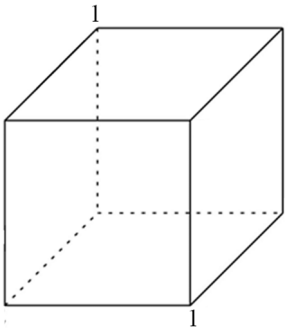
(2) $y=x^2$ のグラフ上に 5 点 A, B$(-1, 1)$，O$(0, 0)$，C，D が図のようにある。2 点 A, C の y 座標は等しく, AD//BC である。

(i) C の x 座標を c とするとき，D の x 座標を c を用いて表せ。

(ii) △OAD：△OBC＝7：1 であるとき，C の x 座標を求めよ。



(3) 右の図のように，立方体の頂点に 1 が 2 つおかれている。2，2，3，3，4，4 の計 6 つの数字を他の 6 つの頂点に 1 つずつおく。このとき，立方体の面の中で，4 頂点に異なる 4 種類の数字がおかれている面が少なくとも 1 つある確率を求めよ。ただし，どの数字のおき方も同様に確からしいとする。



【解答例】

(1)

（解法 1）次数が低い y に着目

$$
\begin{aligned}
&x^3+(5y+1)x^2+(6y+5)xy+6y^2\\
&=(6x+6)y^2+(5x+5)y+x^3+x^2\\
&=6(x+1)y^2+5(x+1)y+x^2(x+1)\\
&=(x+1)\left(6y^2+5y+x^2\right)\\
&=\boldsymbol{(x+1)(x+2y)(x+3y)}
\end{aligned}
$$

（解法 2）単に次数で考える

$$
\begin{aligned}
&x^3+(5y+1)x^2+(6y+5)xy+6y^2\\
&=x^3+5yx^2+6y^2x+x^2+5yx+6y^2\\
&=x\left(x^2+5yx+6y^2\right)+\left(x^2+5xy+6y^2\right)\\
&=x(x+2y)(x+3y)+(x+2y)(x+3y)\\
&=\boldsymbol{(x+1)(x+2y)(x+3y)}
\end{aligned}
$$

【コメント 1】

高校合格すると「降べきの順」とか入学課題で出されると思います。これ高校生が解く問題じゃね？でも開成レベルだと知ってて当然か……。

(2) (i)

直線 BC の傾きは，$\dfrac{c^2-1}{c+1}=\dfrac{(c+1)(c-1)}{c+1}=c-1$

点 A の座標は，$\left(-c,c^2\right)$なので，点 D の座標を$\left(d,d^2\right)$とすると，

$\dfrac{d^2-c^2}{d+c}=d-c$　$d-c=c-1$　となるから，d について解いて，

$d=\boldsymbol{2c-1}$

(2) (ii)

直線 AD は，点 A を通り傾き$c-1$の直線だから，

$y-c^2=(c-1)(x+c)$　すなわち，$y=(c-1)x^2+2c^2-c$

よって，AD と y 軸との交点を E とすると，

△OAD＝△OEA＋△OED

$$=\frac{1}{2}\left(2c^2-c\right)(c+2c-1)=\frac{1}{2}c(2c-1)(3c-1)$$

同様に，$\triangle \mathrm{OBC}=\frac{1}{2}c(c+1)$

△OAD：△OBC＝7：1 なので，

$\frac{1}{2}c(2c-1)(3c-1):\frac{1}{2}c(c+1)=7:1$

$7(c+1)=(2c-1)(3c-1)$　$6c^2-12c-6=0$　$c^2-2c-1=0$

$c>0$ より，$c=\mathbf{1+\sqrt{2}}$

【コメント 2】

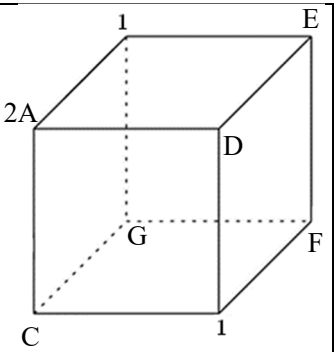
文字式が面倒ですが，これぐらいできないと高校で困ります。なお，塾でよく教えられる公式，比例定数×（x 座標の和）を知っていると少し楽。というか，ほとんどのこのレベル帯の子は知っているか。

$y=cx^2$上の点，$\mathrm{A}\left(a,ca^2\right)$，$\mathrm{B}\left(b,cb^2\right)$の 2 点を通る直線の式の傾きは，

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\frac{ca^2-cb^2}{a-b}=\frac{c\left(a^2-b^2\right)}{a-b}=\frac{c(a+b)(a-b)}{a-b}=c(a+b)$$

比例定数×（2 点の x 座標の和）で求めることが出来る！

(3)



残り 6 つの頂点に，2A，2B，3A，3B，4A，4B（同じ数字も区別する）を置いていく。

ここで，6 つの頂点のうち，どこか 1 つの頂点に 2A を置く。どこに置こうが 1 との位置関係は変わらないためである（※1）。

残り 5 つの頂点に，2B，3A，3B，4A，4B を置けばよいので，この置き方は，全てで 5×4×3×2×1＝120 通り。残りの頂点を右図のように C，D，E，F，G とする。立方体の面の中で，4 頂点に異なる 4 種類の数字がおかれている面が少なくとも 1 つある確率＝1－どの面にも異なる 4 種類の数字が置かれていない確率である。どの面にも異なる 4 種類の数字が置かれていないのは，

I）C に 2B を置く　2　×2　　×2　　＝8 通り

DE に 3 か 4 のペアを置く↑　↑3 の並べ方　↑4 の並べ方

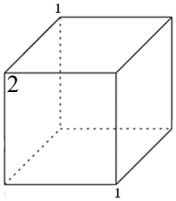
II）D に 2B を置く　同様に 8 通り　の合計 16 通りだから，求める確率は，

$$\frac{120-16}{120}=\frac{104}{120}=\boldsymbol{\frac{13}{15}}$$

※1　いわゆる円順列，納得いかないなら立方体をくるくるして納得して。

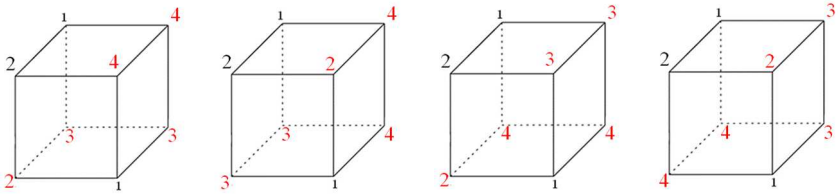
※2　余事象を考える問題。

＜高校生の解き方＞



右図のように 2 を固定すると，残り 5 頂点での 2，3，3，4，4 の置き方は，$\dfrac{5!}{2!\bullet 2!}=30$ 通り

どの面にも異なる 4 種類の数字が置かれていないのは，



の合計 4 通り。したがって求める確率は，$1-\dfrac{4}{30}=\mathbf{\dfrac{13}{15}}$

【コメント 3】

これ思い切り高校生が解く問題ですよね。5×4×3×2×1＝120 通りなどの，軽い順列ならギリ中学範囲かなと思い解答作成しましたが，どう考えても階乗！用いた方が楽です。階乗を階乗で割るの知らないと厳しい。普通に開成高校の数学 A の定期テストで十分出題できるレベルの高校入試問題。

【コメント 4】

まあでも高校入る前にこれぐらいできないと，高校入ってからしんどいのか？？

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/