

空間における軌跡問題と四面体体積比

範囲：空間図形

難易度：★★★★★

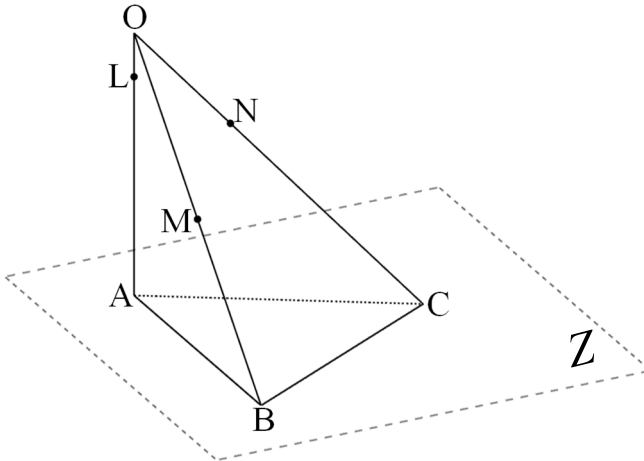
得点

/12

出典：2014 年度 筑波大学附属高校

下の図のように、 $OA=AB=BC=CA=6$ cm、 $OB=OC=6\sqrt{2}$ cm の四面体 $OABC$ が、 $\triangle ABC$ を底面として平面 Z 上におかれている。辺 OA 上に $OL=1$ cm である点 L 、辺 OB 上に $OM=3\sqrt{2}$ cm である点 M 、辺 OC 上に $ON=2\sqrt{2}$ cm である点 N をとり、 $\triangle OLN$ の周上に点 P をとり、直線 PM と平面 Z との交点を Q とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) $\triangle OLN$ の面積を求めなさい。
- (2) P が線分 ON 上を O から N まで動くとき、 Q が描く図形の長さを求めなさい。
- (3) P が $\triangle OLN$ の周上を 1 周するとき、 Q の描く図形を底面、 M を頂点とする四面体の体積は、四面体 $OLMN$ の体積の何倍か求めなさい。



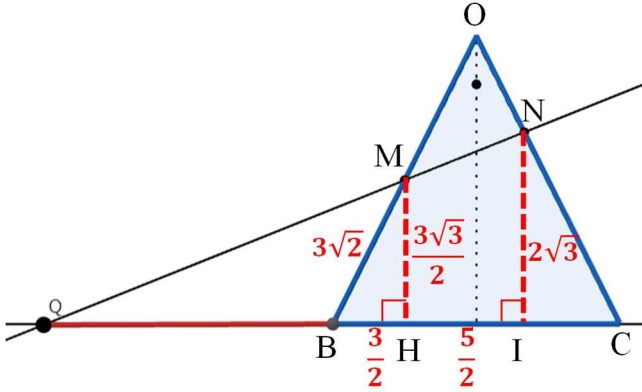
【解答例】

条件から $\triangle OAB$, $\triangle OAC$ は直角二等辺三角形なので, $OA \perp$ 平面 Z

(1) (4点)

$$\triangle OLN = \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \triangle OAC = \frac{1}{18} \times 18 = \mathbf{1 \text{ cm}^2}$$

(2) (4点)

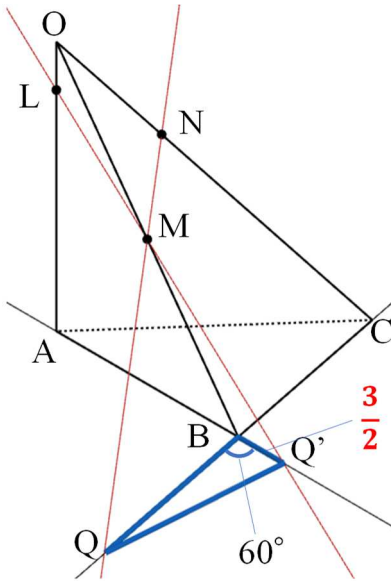


点 O, M, N, P は同一平面上にあるので, 点 Q も同一平面上にある。よって, 点 Q は, 直線 CB 上を動く。上図で赤実線の線分 BQ の長さを求めればよい。

$QB = x$ とし, $\triangle QMH \sim \triangle QNI$ なので, $3:4 = \left(x + \frac{3}{2}\right) : (x + 4)$

$$x = 6 \quad \mathbf{6 \text{ cm}}$$

(3) (4点)



(2) と同様に、点 P が点 L と一致するときの点 Q の位置は、直線 AB 上において、 $BQ = \frac{3}{2}$ となる位置である。この位置を Q' とする。 (※1)

左図で、 $\triangle BQQ'$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad (\text{※2})$$

高さは、3 となるので、M を頂点とする四面体 $MBQQ'$ の体積は、

$$\frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{4} \times 3 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3$$

四面体 OLMN の体積 (※3)

$$= \text{四面体 OABC} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{36} \times 18\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$$

よって、 $\frac{9\sqrt{3}}{4} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$ 倍

(※1)

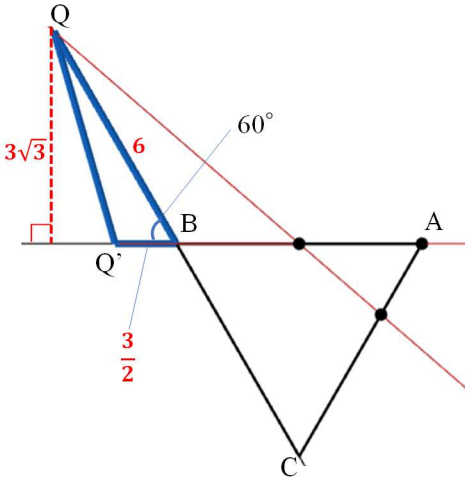
5 点 L, M, N, Q, Q' は同一平面上にあるので、 $Q \rightarrow Q'$ はこのような直線を描く。BQ' の求め方は (2) より簡単だが念のためやっておく。

点 M から AB に垂線を下ろし交点を J とすると、 $MJ = 3$ (OA/MJ より、 $MJ \perp$ 平面 Z) $BQ = x$ とし、 $\triangle Q'MJ \sim \triangle Q'LA$ なので

$$5:3 = (x+6):(x+3) \quad x = \frac{3}{2}$$

(※2)

左図による



(※3)

<https://hokkaimath.jp/blog-entry-44.html> でも参照してください。

四面体 OLMN を N を頂点，四面体 OABC を C を頂点として見ると，

$\triangle OLM = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \triangle OAB$ ， 高さは $\frac{1}{3}$ 倍になっている。

【コメント】

何となく、いかにも教育が盛んな大学の附属高校の問題と言う感じがします。空間図形はいかに平面を切り取るかなので、その練習が出来ているかどうか、また空間図形に関する比率のテクニックを上手く使いこなせるか。それらが出来る受験生なら、時間あれば余裕です。大半の中学生はそこまで身に着けることは難しいですが.....。

- ・ 平面図形における比率の練習問題 (2019 年度愛知県 B)

<https://hokkaimath.jp/blog-entry-181.html>

- ・ 空間図形における似たような難問 (2019 年度福島県)

<https://hokkaimath.jp/blog-entry-231.html>

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>