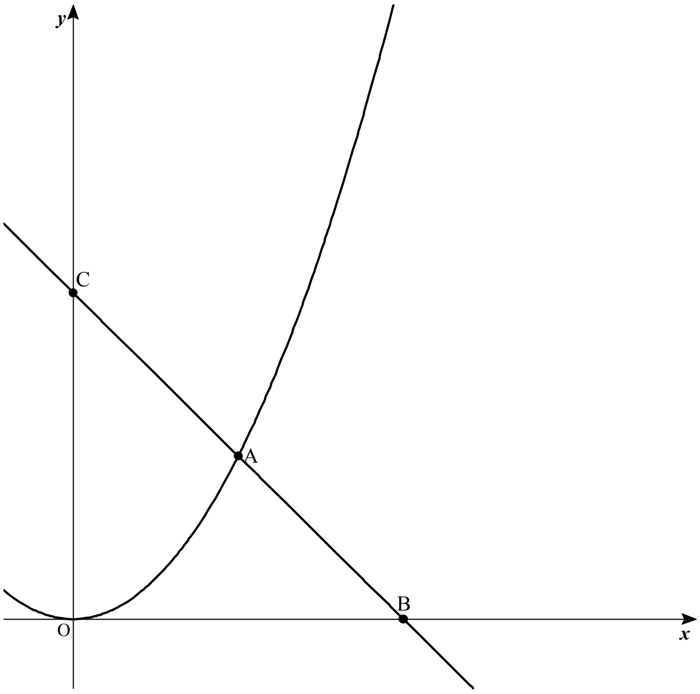
えげつない格子点と確率	
範囲：全て	難易度：★★★★★+

得点　　　/15

以下の図のように，$y = ax^2 \ldots$①$(a > 0)$のグラフと，$y = -x + 8 \ldots$②のグラフがあります。

①と②との，x座標が正となる交点をA，②と x 軸との交点をB，②と y 軸との交点をCとします。次の問いに答えなさい。



問1　△OBCの面積が，△OABの面積の4倍となるとき，a の値を求めなさい。

問2　1～6の出目が書かれた，大小2つのサイコロを振り，大きいさいころの出目を m，小さいさいころの出目を n とし，点D（m, n）を取ります。点Dが，△OABの内部にある確率が，0.5になるとき，a の取りうる範囲を求めなさい。ただし，△OABの辺上も内部とし，1～6が出る確率は同様に確からしいとします。

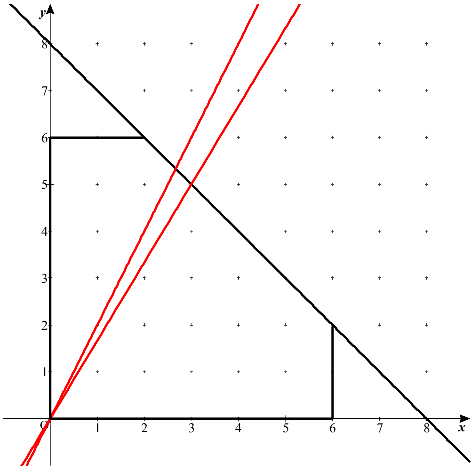
問3　△BCEが正三角形になるよう，第1象限に点Eを取ります。CE//OA のとき，A の座標を求めなさい。途中計算も書くこと。

えげつない格子点と確率　解答例	
範囲：全て	難易度：★★★★★+

問 1（4 点）

CA：AB＝3：1 となればよい。A（6, 2）となる。（A から垂線を下ろし，相似の関係を使うと何でこうなるか分かる。）　$2=36a$　$\boldsymbol{a=\frac{1}{18}}$

問 2（5 点）



△OAB の内部に，（m, n）で表せる点が，丁度 18 個となれば良い。y=2x 引いてみると，20 個。丁度その直線上に 2 個あるので，直線 OA の傾きが 2 より小さければ，18 個となるのが分かる。

次に，17 個となるのは，y=(5/3)x より小さいとき。

したがって，点 A の座標は，

$y=2x$のとき，$2x=-x+8$　$x=\frac{8}{3}$　$y=\frac{16}{3}$

$\frac{16}{3}=\frac{64}{9}a$　$a=\frac{3}{4}$

$y=\frac{5}{3}x$のとき，$\frac{5}{3}x=-x+8$　$x=3$　$y=5$

$a=\frac{5}{9}$

$\boldsymbol{\frac{5}{9}\le a<\frac{3}{4}}$

※不等号ミスは 2 点減点。

【コメント】

ええ，この問題は解けなくていいですね。何の為に作ったんだろう……。

問 3（6 点）

△EBC は正三角形なので，∠E の 2 等分線は，BC を垂直に二等分する。

よって，点 E は，（(4, 4) を通り，傾きが 1 である）y=x 上にある。【1 点】

E（t, t）と表す。BC=$\sqrt{64+64}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$であるから，

$CE^2=128=t^2+(t-8)^2$【1 点】

$t^2-8t-32=0$　$t>0$ より，$t=4+4\sqrt{3}$

よって，$E(4+4\sqrt{3},\ 4+4\sqrt{3})$【1 点】　※

A から x 軸に垂線を下ろし交点を F とする。CE//OA だから，

$\left(4\sqrt{3}+4\right):\left(4\sqrt{3}-4\right)=OF:AF$【1 点】

△BAF は直角二等辺三角形だから，AF＝BF。よって，OB＝OF+AF であるから，点 A の y 座標を t とすると，$8\sqrt{3}:\left(4\sqrt{3}-4\right)=8:t$【1 点】

$t=4-\frac{4\sqrt{3}}{3}$　x座標は，$8-\left(4-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)=4+\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\boldsymbol{A\left(4+\frac{4\sqrt{3}}{3},4-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)}$　【1 点】

※【範囲外でいいなら】

CE の傾きは，$\frac{4\sqrt{3}-4}{4\sqrt{3}+4}$【1 点】＝$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

CE//OA より，$OA: y=\left(2-\sqrt{3}\right)x$

$y=-x+8$と連立した方程式を解いて，【1 点】

$\left(2-\sqrt{3}\right)x=-x+8$　$\left(3-\sqrt{3}\right)x=8$

$x=\frac{8}{3-\sqrt{3}}=\frac{8\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}=\frac{4}{3}\left(3+\sqrt{3}\right)=4+\frac{4\sqrt{3}}{3}$

y座標は，$-\left(4+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)+8=4-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\boldsymbol{A\left(4+\frac{4\sqrt{3}}{3},4-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)}$　【1 点】