

円周と1次関数

範囲：1次関数

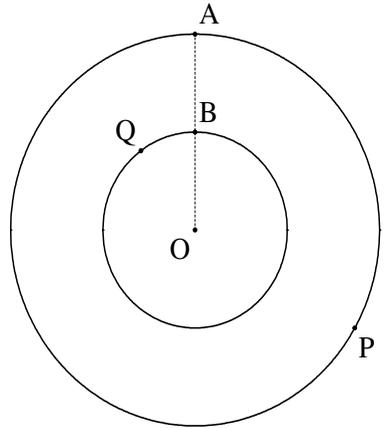
難易度：★★★★★

得点

/12

出典：2021年度 滋賀県 膳所高校 特色検査

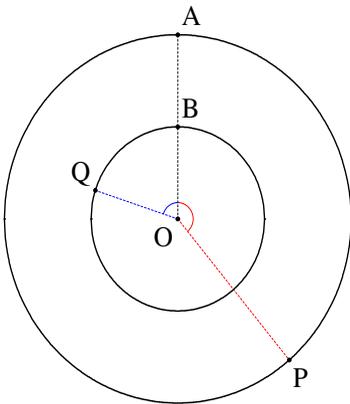
図のように、点 O を中心とした大小2つの円の円周上に点 A, B があり、3点 O, B, A は同一直線上にある。点 P, Q が次の【条件】にしたがって、一定の速さで動くとき、3点 O, Q, P の順ではじめて一直線上に並ぶのは点 Q が出発してから何秒後か、求めなさい。



【条件】

点 P	点 A を出発し、大きい円の円周上を時計回りに 18 秒で一周する。
点 Q	点 P が出発してから 5 秒後に点 B を出発し、小さい円の円周上を反時計回りに 10 秒で一周する。

【解答例】

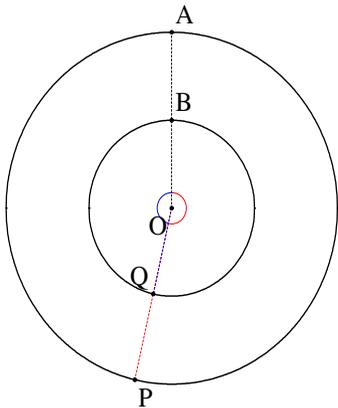


左図のように、

点 Q が出発してから t 秒後の $\angle BOQ$ (反時計回り) の大きさは、10 秒で一周 (1 秒 36°) なので、 $\angle BOQ = 36t$ と表される。

$\angle POA$ (時計回り) の大きさは、18 秒で一周 (1 秒 20°)、また、点 Q に比べて 5 秒早く出発しているので、

$\angle POA = 20(t + 5)$ と表せる。(※1)



O, Q, P の順で一直線上に並ぶには、左図のように、 $\angle POA$ (時計回り) + $\angle BOQ$ (反時計回り) = 360° となればよいので、

$$36t + 20(t + 5) = 360 \quad 56t = 260 \quad t = \frac{65}{14}$$

$\frac{65}{14}$ 秒後

(※1) $20(t + 5) = 20t + 100$ Q に比べて 5 秒早いので、 100° 先に進んでいる。

【コメント】

動点 P, Q 問題, 1 次方程式の文章題を, 円周上で行っている問題です。
1 周何秒→1 秒につき 0° と変換, 一直線上になる→角の和が 360° と変換
できれば良い問題です。

【おまけ】

n	t
1	$\frac{65}{14}$
2	$\frac{155}{14}$
3	$\frac{245}{14}$
\vdots	\vdots

なお, はじめて一直線上に並ぶだけなら上記でよいですが, 2 回目, 3 回目, …… n 回目と考えるときは, 進んだ角度の合計が 360° , 720° , 1080° …… $360n^\circ$ となればよいので,

$$36t + 20(t + 5) = 360n$$

$$t = \frac{45}{7}n - \frac{25}{14}$$

となります。

恐らく, 高校数学で「三角関数」を学習するのですが, その分野を参考に, この入試問題を作成している, と思われます。

【作成】

高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>