

技巧的な小問集合

範囲：小問集合

難易度：★×6

得点

/30

出典：2020年度 昭和学院秀英高校

次の問いに答えよ。

- (1) $x = 2 + 3\sqrt{3}$ のとき $\frac{x^2 - 1 + (x - 1)2\sqrt{3}}{x^2 - 3x + 2}$ の値を求めよ。
- (2) $(x^2 + 11x + 9)(x^2 + 11x + 19) + 9$ を因数分解せよ。
- (3) 方程式 $(x - 2y + 6)(3x + 4y - 14)^2 = 7$ を満たす整数 x, y を求めよ。
- (4) 1 g, 2 g, 3 g のおもりをいくつか使って 12 g にするには全部で何通りの方法があるか、ただし、使わない重さがあってもよいものとする。
- (5) 容器 A には濃度 $x\%$ の食塩水が 200 g, 容器 B には濃度 $y\%$ の食塩水が 100 g 入っている。200 g 入っている容器から別の容器に 100 g を移し、よくかき混ぜる操作を続けて 3 回行った。このとき容器 B の食塩水の濃度を x, y で表せ。

【解答例】**(1) (6点)**

$$\frac{x^2 - 1 + (x - 1)2\sqrt{3}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x + 1)(x - 1) + (x - 1)2\sqrt{3}}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{x + 1 + 2\sqrt{3}}{x - 2}$$

$$= \frac{3 + 5\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} + 15}{9} = \frac{\sqrt{3} + 5}{3}$$

(2) (6点)

$$x^2 + 11x + 9 = A \text{ と置くと,}$$

$$(x^2 + 11x + 9)(x^2 + 11x + 19) + 9$$

$$= A(A + 10) + 9 = A^2 + 10A + 9 = (A + 9)(A + 1)$$

$$= (x^2 + 11x + 18)(x^2 + 11x + 10) = (x + 9)(x + 2)(x + 10)(x + 1)$$

※ $x^2 + 11x = A$ と置いても良いが, 9×19 の計算が面倒臭い。

(3) (6点)

x, y は整数なので,

$(x - 2y + 6)$ も, $(3x + 4y - 14)^2$ も整数となるので,

$x - 2y + 6 = 7, 3x + 4y - 14 = \pm 1$, であるが, $3x + 4y - 14 = 1$ のとき, x, y が整数とならない。よって,

$$\begin{cases} x - 2y + 6 = 7 \\ 3x + 4y - 14 = -1 \end{cases} \text{ これを解いて, } \mathbf{x = 3, y = 1}$$

(4) (6点)

1 g, 2 g, 3 g のおもりの個数をそれぞれ x, y, z とする。 $x + 2y + 3z = 12$

$z = 4$ のとき, $x + 2y = 0, y = 0$ の 1 通り ※ y が定まると x も定まる

$z = 3$ のとき, $x + 2y = 3, y = 0, 1$ の 2 通り **※0 を忘れない!**

$z = 2$ のとき, $x + 2y = 6, y = 0, 1, 2, 3$ の 4 通り

$z = 1$ のとき, $x + 2y = 9, y = 0, 1, 2, 3, 4$ の 5 通り

$z = 0$ のとき, $x + 2y = 12, y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の 7 通り 合計 **19 通り**

(5) (6点)

問題文が非常に分かりづらい

①, 最初の食塩量

容器 A には濃度 $x\%$ の食塩水 200 g → 食塩量は $2x$ g

容器 B には濃度 $y\%$ の食塩水 100 g → 食塩量は y g

①, 1 回目の移し

「200 g 入っている容器から別の容器に 100 g を移し」

容器 A の 200 g のうち 100 g を容器 B に入れて混ぜている

容器 B の食塩量は, $x+y$ g となる。容器 A は x g となる。

②, 2 回目の移し

①で容器 B が 200 g, 容器 A が 100 g となっている。

容器 B の 200 g のうち 100 g を容器 A に入れて混ぜている

容器 A の食塩量は, $\frac{x+y}{2} + x = \frac{3x+y}{2}$ g, 容器 B は $\frac{x+y}{2}$ g

③, 3 回目の移し

容器 B の食塩量は, $\frac{1}{2} \left(\frac{3x+y}{2} \right) + \frac{x+y}{2} = \frac{5x+3y}{4}$ g となるので,

濃度は $\frac{5x+3y}{8}\%$ ※容器 B には 200 g 入っていることに注意!

【コメント】

難関私立あるあるの小問集合です。解けないということはないでしょう、いかに素早く解けるかが勝負。あとミス注意です、平気です。

(1) は因数分解しなさいと行間に書いていますね。(2) は良い練習です。

(3) は士に注意。(4) は本当 0 を忘れないようにしましょう。(5) は最初何を言っているんだろうと思いました。分かりづらくない? え? 私の経験不足? そう.....。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>