

面倒な動点 PQ

範囲：動点 P

難易度：★★★★★

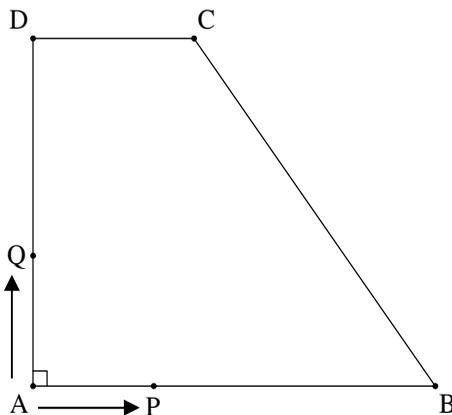
得点

/17

出典：2021 年度 埼玉県

下の図のような、 $AB=BC=5$ cm, $CD=2$ cm, $DA=4$ cm, $\angle A = \angle D = 90^\circ$ の台形 ABCD があります。

点 P は点 A を出発して、辺 AB 上を毎秒 1 cm の速さで動き、点 B に到着すると止まります。また、点 Q は点 A を出発して、辺 AD, DC, CB 上を順に毎秒 1 cm の速さで動き、点 B に到着すると止まります。



2 点 P, Q が点 A を同時に出発してから x 秒後の $\triangle APQ$ の面積を y cm^2 とするとき、次の各問に答えなさい。

- (1) 点 Q が点 D に到着するまでの x と y の関係を式で表しなさい。また、そのときの x の変域を求めなさい。
- (2) $\triangle APQ$ と $\triangle AQC$ の面積比が $3:1$ になるときの x の値をすべて求めなさい。
- (3) $\triangle APQ$ の面積が台形 ABCD の面積の半分になるときの x の値を、途中の説明も書いてすべて求めなさい。

【解答例】

(1) (5点)

点 Q が辺 AD 上に存在するとき、 $0 \leq x \leq 4$

$AP=AQ=x$ なので、 $\triangle APQ=y=\frac{1}{2} \times x \times x = \frac{1}{2}x^2$ となる。

$$y = \frac{1}{2}x^2 \quad (0 \leq x \leq 4) \text{ ※ } 0 < x < 4 \text{ も可}$$

(2) (6点)

$4 \leq x \leq 5$ で

$$\triangle APQ = \frac{1}{2} \times x \times 4 = 2x$$

$$\triangle AQC = \frac{1}{2} \times (6-x) \times 4 = 12 - 2x$$

$\triangle APQ : \triangle AQC = 3 : 1$ だから、

$$2x : (12 - 2x) = 3 : 1$$

$$36 - 6x = 2x \quad 8x = 36 \quad x = \frac{9}{2} \quad \text{これは、} 4 \leq x \leq 5 \text{ を満たす。}$$

$5 \leq x \leq 6$ では、 $\triangle APQ = 10$ 、 $\triangle AQC = 12 - 2x$ なので、

$$10 : (12 - 2x) = 3 : 1 \quad 36 - 6x = 10 \quad 6x = 26 \quad x = \frac{13}{3}$$

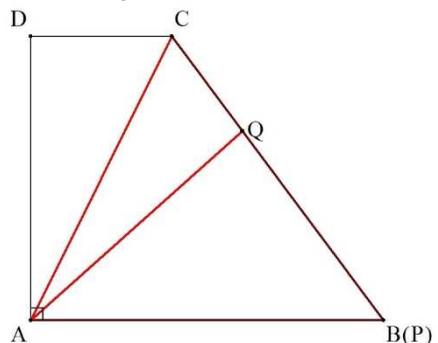
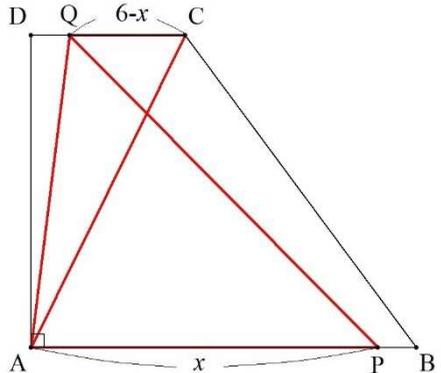
これは、 $5 \leq x \leq 6$ を満たさない。

$6 \leq x \leq 11$ では、点 Q は辺 CB 上を動く。

$PQ : CQ = 3 : 1$ となればよいので、

$$\text{※1 このとき、} CQ = 5 \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{5}{4}$$

$$\text{であるから、} x = 6 + \frac{5}{4} = \frac{29}{4}$$



$$x = \frac{9}{2}, \frac{29}{4}$$

※1 高さ共通なので、面積比は底辺比となる。

(3) (6点)

台形の面積の半分は、 7 cm^2 である。

$0 \leq x \leq 4$ のとき、 $y = \frac{1}{2}x^2$ なので、 $\frac{1}{2}x^2 = 7$ これを解いて、 $x = \pm\sqrt{14}$

$0 \leq x \leq 4$ なので、 $x = \sqrt{14}$

$4 \leq x \leq 6$ のとき、 $y \geq 8$ である。

$6 \leq x \leq 11$ のとき、 $\triangle ABC$ の面積が 10 cm^2 なので、

$\triangle APQ = \triangle APQ \times \frac{PQ}{5} = 2PQ$ となる。

$2PQ = 7$ とすると、 $PQ = \frac{7}{2}$ このとき、 $CQ = \frac{3}{2}$ なので、このとき、

$x = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$ よって答えは、 $x = \sqrt{14}, \frac{15}{2}$

【コメント】

動点 P 問題の中でも結構面倒な問題です。解いてみて気づけば、そこまで面倒な計算は求められておりませんが、それでもきつい。

(1) は、 $y = ax^2$ 分野の定期テストでよく出題される問題だと思われます。解けて当然？

(2) は、地味に $4 \leq x \leq 5$ 、 $5 \leq x \leq 6$ と細かくやらなくてはなりませんが、気づかなくても大丈夫。

(2) (3) とともに、 $CQ : QB$ が面積比と気づけば、計算が楽にできます。 $6 \leq x \leq 11$ では、解く上で関数で表す必要は全くありません。

【作成】

高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>