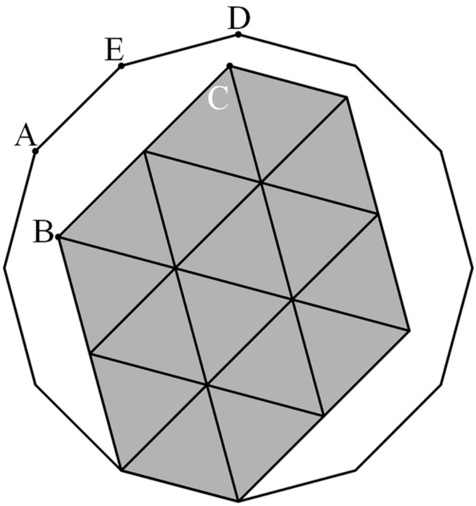
正十二角形		
範囲：中 3 平面図形	難易度：★×5	得点　　　　　　/16

出典：2011 年度　灘高校

※途中の式や文章も記述すること。説明に問題の図を用いても良い。

1 辺の長さが 1 の正十二角形の内部に 1 辺の長さが 1 の正三角形 16 個を下図のように並べた（網掛け部分）。図の 5 つの頂点を A，B，C，D，E とする。

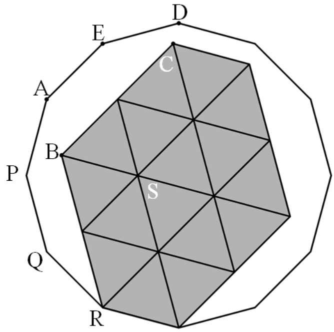


（1）2 点 A，B 間の距離を求めよ。

（2）2 点 C，D 間の距離を求めよ。

（3）五角形 ABCDE の面積を求めよ。

【解答例】



点 P，Q，R，S を左図のように定める。

（1）（5 点）

四角形 APQR は等脚台形で，

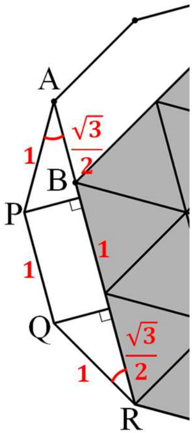
∠QRA＝∠PAR＝150－120＝30°　であるから，点 P，Q から線分 AR に垂線を下すことで，左図のように，

$$AR = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

と求められる。

$BR = 2$ より，

$AB = 1 + \sqrt{3} - 2 = \mathbf{\sqrt{3} - 1}$



（2）（5 点）

$ES = \sqrt{3} - 1 + 1 = \sqrt{3}$

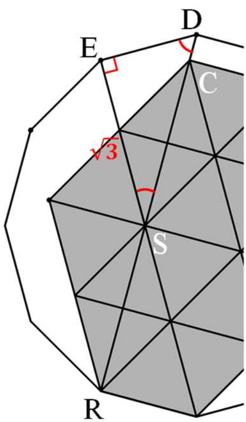
∠SED＝90°，∠ESD＝30°　だから，

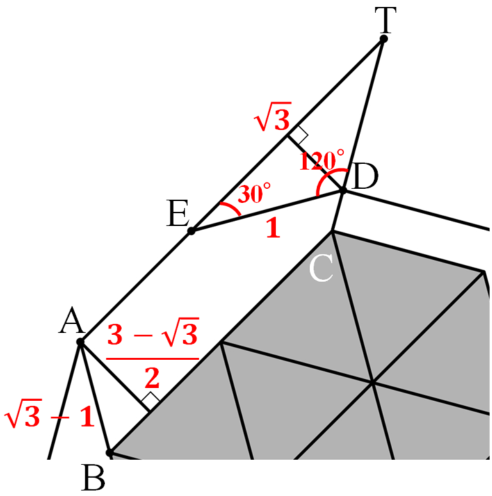
$SD = 2$，$RS = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$だから，

$RD = 2 + \sqrt{3}$

$RC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$なので，

$CD = 2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \mathbf{2 - \sqrt{3}}$





（3）（6 点）

直線 AE と直線 CD との交点を T とする。

五角形 ABCDE

＝台形 ABCT－△DET

∠CDE＝150°－90°＝60° より∠EDT＝120°，∠DET＝30° だから，左図より，ET＝$\sqrt{3}$

台形 ABCT の，BC を上底，AT を下底としたときの高さは，

$\frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ なので，

台形 ABCT $= \frac{1}{2} \times \left(2+1+\sqrt{3}\right) \times \frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{9-3}{4} = \frac{3}{2}$

△DET で ET を底辺とすると高さは $\frac{1}{2}$ だから，

△DET $= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$　　五角形 ABCDE $= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$　　$\left(\frac{6-\sqrt{3}}{4}\right)$

【コメント】

見た目の図で嫌になりますが，冷静になることができれば，問題自体は公立高校受けるような普通の中学生でも楽しく解けると思われます。ただ記述式，どこまで書けばよいか分かりづらいですね。私は最初「PQ//AR の理由，点 A, B, R が同一直線上にある理由も書かなきゃいけないかな……？」と思いました。たぶんそこまでは求めないと思われるのでカット，明らかだし。どんな計算をしたのか書けてあれば良いと思われます。あと問題文の図を有効活用したり，自分で簡単な図を描いて説明すれば，そんなにきつくもないはず。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/