対称式，整数問題など		
範囲：色々な計算	難易度：★★★★★	得点　　　　/15

出典：2020 年度久留米大学附設高等学校

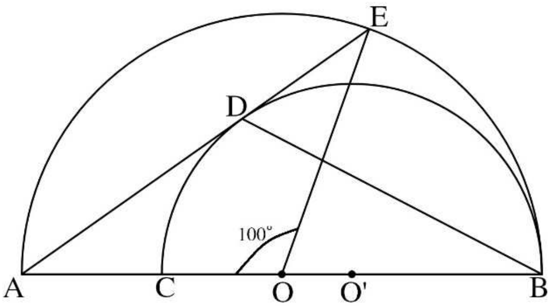
次の各問いに答えよ。

（1）連立方程式 $\begin{cases}(x+3y):(4x-2y)=3:5 \\ 3x-5y=12\end{cases}$ を解け。

（2）$a=\sqrt{3}+\sqrt{15}$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{15}$ のとき，

$\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$ の値を求めよ。

（3）図のように，線分 AB，CB を直径とする大小 2 つの半円があり，小さい方の半円に点 A から接線を引き，2 つの半円との接点と交点をそれぞれ D，E とする。2 つの半円のそれぞれの中心を O，O’とする。∠AOE＝100° であるとき，∠BDE の大きさを求めよ。



（4）$p+q=20$，$p>q>0$ を満たす異なる 2 つの正の整数 p，q の組は 9 組ある。この 9 組のうち，$\sqrt{p}+\sqrt{q}$ の値の大きいほうから 3 番目となる組を求めよ。

（5）$4m^3+n^2=2020$ を満たす正の整数 m，n の組は 2 組ある。その 2 組を求めよ。

【解答例】

(1)(3 点)

$$\begin{cases} (x+3y):(4x-2y)=3:5 \cdots\cdots ① \\ 3x-5y=12 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①を整理して，$12x-6y=5x+15y$　$7x=21y$　$x=3y$

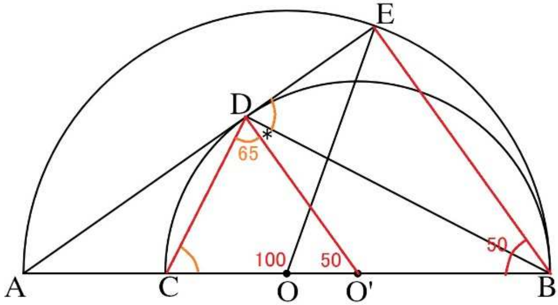
②に代入して，$9y-5y=12$　$4y=12$　$\boldsymbol{y=3,\ x=9}$

(2)(3 点)

$a+b=2\sqrt{3}$，$a-b=2\sqrt{15}$，$ab=3-15=-12$ より，

$$\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}=\frac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}=\frac{60-12}{12+12}=\mathbf{2}$$

(3)(3 点)



∠O’DE＝∠BDC＝90°　で，∠BDO’共通だから，

∠BDE＝∠O’DC　△O’CD は二等辺三角形なので，∠O’DC＝∠O’CD

∠AOE，∠ABE はそれぞれ$\overset{\frown}{\mathrm{AE}}$に対する中心角，円周角なので，

∠ABE＝50°　　また，∠BEA＝∠O’DA＝90°　で同位角が等しいから，

BE//O’D　したがって，∠CO’D＝50°　となるので，∠O’DC＝∠O’CD＝65°

∠BDE＝65°

（4）（3 点）

p	q	pq
19	1	19
18	2	36
17	3	51
16	4	64
15	5	75
14	6	84
13	7	91
12	8	96
11	9	99

$p > q > 0$ より，$\sqrt{p}+\sqrt{q} > 0$ であるから，

$\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^2$の値も，3 番目に大きくなる。

$\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^2 = p+q+2\sqrt{pq} = 20+2\sqrt{pq}$

※$p+q=20$ である

よって，$2\sqrt{pq}$の大きさが 3 番目になるものを選べばよい，

それは左の表から，（p，q）＝**（13，7）**

（5）（3 点）

$4m^3$は，$m=8$ のとき，$4\times 8^3=2048$，$m=7$ のとき，$4\times 7^3=1372$ なので

$m \leqq 7$ である。さらに，

$$n^2 = 2020-4m^3 = 4\left(505-m^3\right) = 2^2\times(505-m^3)$$

であるから，$505-m^3$は平方数である必要がある。

$m=7$ のとき，$505-7^3=162$　$m=6$ のとき，$505-216=289=17^2$

$m=5$ のとき，$505-125=380$　$m=4$ のとき，$505-64=441=21^2$

よって，（m, n）の組み合わせは，**（4, 42），（6, 34）**

【コメント】

若干高校を先取りしているような内容の小問集合です。「対称式」を中学生で知るには，塾など通ってないと厳しいかも（もちろんそのまま代入しても解ける）。都立独自校でもありがちですね。整数問題は，m^3 の大きさに注目です。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/