

ひたすら難しい相似証明

範囲：中3相似

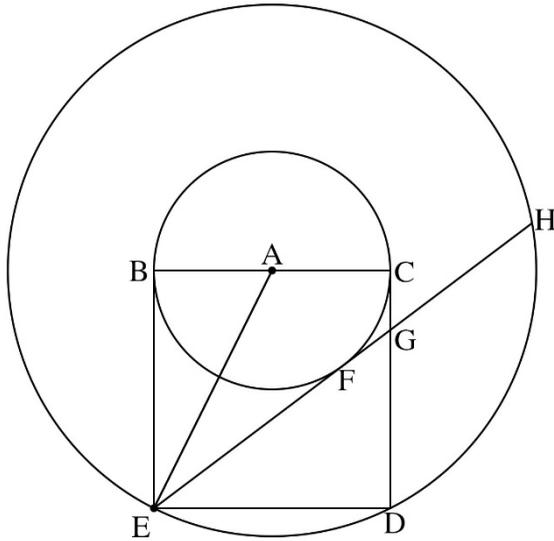
難易度：★★★★★

得点

/12

出典：オリジナル

点 A を中心とする半径 3 cm の円 a があります。円周上に、点 B, C を、線分 BC が直径となるように取ります。点 B, C から接線を引き、接線の上に、点 D, E を四角形 BCDE が正方形となるように取ります。線分 AE を半径とする円 b を描き、点 E から円 a に接線を引き、点 B とは異なる円 a との接点を F とします。直線 EF と、線分 CD との交点を G、円 b との交点を H とします。次の問いに答えなさい。



問 1 $\triangle EBA \sim \triangle AFG$ を証明しなさい。必要であれば、 $\triangle EBA \equiv \triangle EFA$ 、 $\triangle AFG \equiv \triangle ACG$ であることを、証明無しで使ってよいものとします。

問 2 $\triangle DEH$ の面積を求めなさい。途中計算も書きなさい。

【解答・解説】

問 1 (6 点)

仮定より、

$\angle BAE = \angle FAE = a^\circ$, $\angle FAG = \angle CAG = b^\circ$ と置くと、 $2a^\circ + 2b^\circ = 180^\circ$ より、 $a^\circ + b^\circ = 90^\circ$ したがって、 $\angle EAG = 90^\circ$ となる。【2 点】

$\triangle EFA$ と $\triangle AFG$ において、直線 EF は、円 a の接線だから、

$\angle EFA = \angle AFG = 90^\circ \dots \textcircled{1}$ 【1 点】

また、 $\angle EAF = 90^\circ - b^\circ$

$$\angle AGF = 180^\circ - 90^\circ - b^\circ = 90^\circ - b^\circ$$

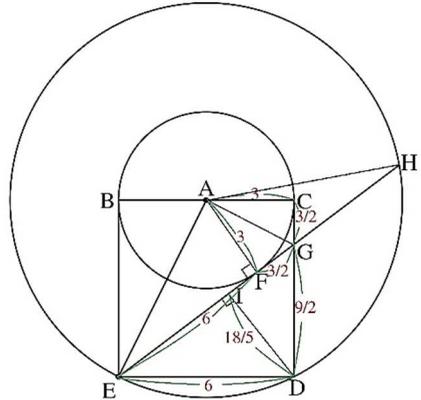
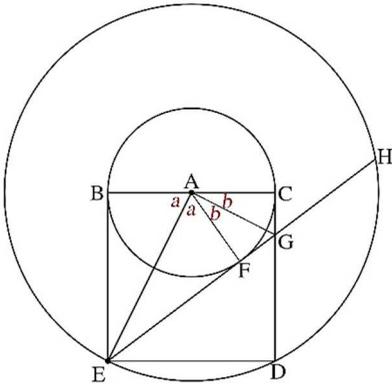
したがって、 $\angle EAF = \angle AGF \dots \textcircled{2}$ 【2 点】

①、②より、2 組の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle EFA \sim \triangle AFG$ 【1 点】

$\triangle EBA \equiv \triangle EFA$ であるから、 $\triangle EBA \sim \triangle AFG$ 【1 点】

問 1 参考図

問 2 参考図



問2 (6点)

$\triangle EFA \sim \triangle ACG$ なので、

$$3:GC = 6:3 \quad GC = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

$$GD = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \text{ cm} \quad \text{【GD 1点】}$$

$\triangle ACG \equiv \triangle AFG$ なので、 $CG = FG$ だから、

$$GE = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2} \text{ cm} \quad \text{【GE 1点】}$$

D から EG に垂線を下ろし交点を I とする。

$\triangle GDE \sim \triangle GID$ であるので、

$$6:ID = \frac{15}{2}:\frac{9}{2} = 5:3 \quad ID = \frac{18}{5} \text{ cm} \quad \text{【ID 1点】}$$

また、 $EH = 2EF = 12 \text{ cm}$ 【EH 1点】

したがって、 $\triangle DEH$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \times 12 \times \frac{18}{5} = \frac{108}{5} \text{ cm}^2 \quad \text{【面積 2点】}$$

【コメント】

道コン、11月、1月は、裁量問題で三平方の定理を出題できないので、頑張って難問作ってきます。こんな感じ？（ここまで長くはないかも。）

難問と言えば三平方ですが、あまりにも三平方に偏るとバランスが悪いので、相似だけで解ける問題も出題されることがあります。ただこの問題、三平方用いた方が、問2はラクかも……？

【制作】

高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>