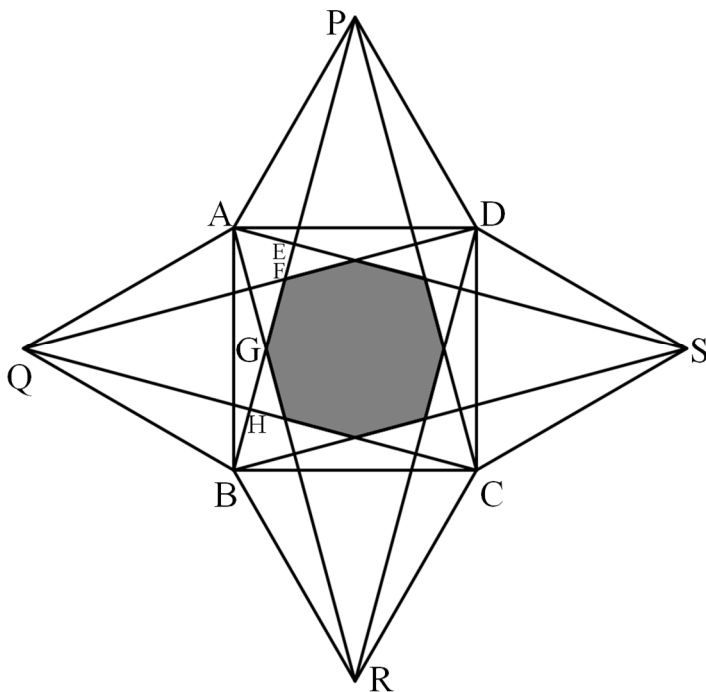


| my way my way my way |         |    |       |
|----------------------|---------|----|-------|
| 範囲：平面図形              | 難易度：★×7 | 得点 | /1794 |

出典：2018 年度 開成高校

1 辺の長さが 2 の正方形を底面とし、4 つの側面がすべて正三角形である四角すいの展開図を書き、頂点を図のように線分で結んだ。

- (1) もとの四角すいの体積を求めよ。
- (2) 線分 EH の長さを求めよ。また  $\angle PFQ$ ,  $\angle AGB$  を求めよ。
- (3) 色が塗られた部分の面積を求めよ。
- (4) 線分 AF, DF, PF について、次の (ア) (イ) (ウ) のうち、どれが正しいか答えよ。またその理由を簡潔に述べよ。  
(ア)  $AF+DF>PF$  (イ)  $AF+DF=PF$  (ウ)  $AF+DF<PF$





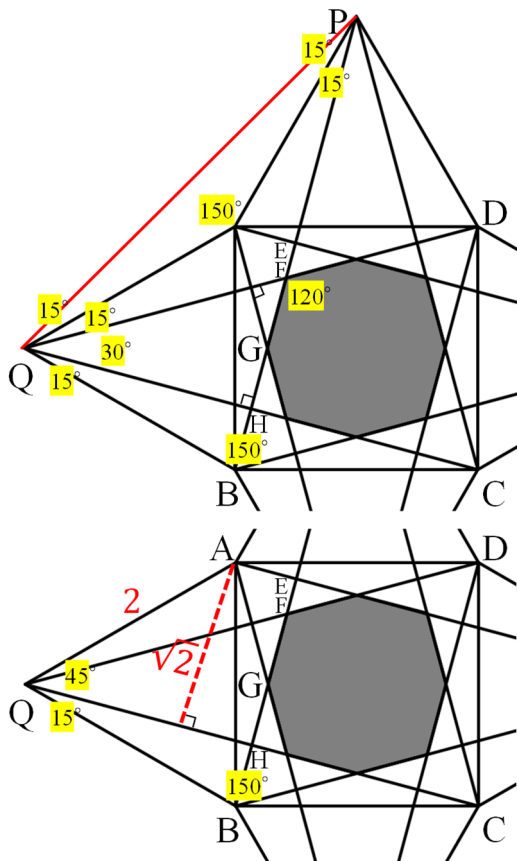
# 【解答解説】

## (1) (1774 点)

正方形の対角線の長さは $2\sqrt{2}$  なので、四角すいの高さは、 $\sqrt{4-2} = \sqrt{2}$

$$\text{体積は、} \frac{1}{3} \times 2^2 \times \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

## (2) (3 点×3)



$$\angle QBC = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$$

$\triangle BQC$  は二等辺三角形となるので、 $\angle BQC = 30^\circ \div 2 = 15^\circ$

$$\angle QAP = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$$

$\triangle AQP$  は二等辺三角形なので、 $\angle AQP = 15^\circ$

そうやっていくと、左図のように角度が分かっていく。

$\triangle FQP$  は二等辺三角形で、底角が  $30^\circ$  となるから、

$$\angle PFQ = 120^\circ$$

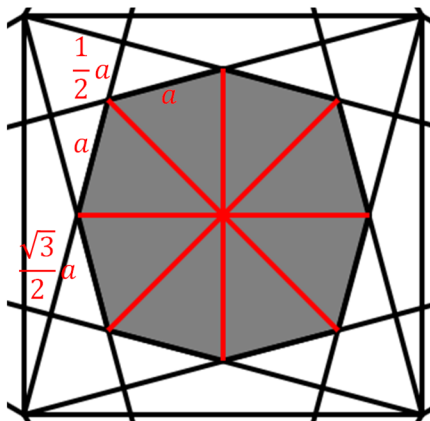
$$\angle AGB = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

$$\angle AQH = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$$

点 A から QC に垂線を下ろすと、直角二等辺三角形ができる。この垂線の長さは EH と等しい。

$$EH = \sqrt{2}$$

(3) (5点)



(2) で丁寧に角度を書き込んだので、有名三角形が大量発生することが分かる。色が塗られた正八角形の一辺の長さを  $a$  とする。

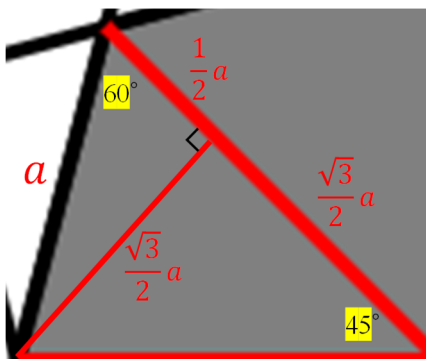
左図のように、

$$EH = \left( \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \right) a = \sqrt{2}$$

となるから、

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{3 + \sqrt{3}}$$

正八角形を八等分し、一つの三角形を考える。左図のように面積は、



$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

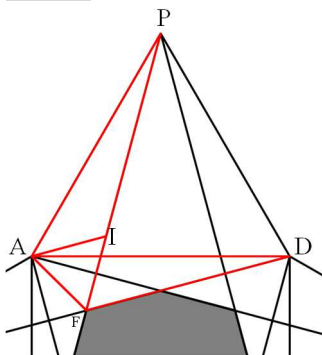
$$= \frac{1}{8} (3 + \sqrt{3}) a^2$$

$$= \frac{1}{8} (3 + \sqrt{3}) \times \frac{8}{(3 + \sqrt{3})^2} = \frac{1}{3 + \sqrt{3}}$$

よって、求める面積は、 $\frac{8}{3 + \sqrt{3}} = \frac{8(3 - \sqrt{3})}{6} = 4 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$

#### (4) (3点×2)

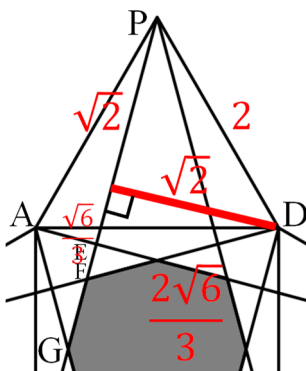
(イ)



＜おしゃれすぎる理由＞

PF 上に  $AF=IF$  となる点 I をとると,  $\triangle AFI$  は正三角形で,  $\triangle AFD \equiv \triangle AIP$ ,  
よって,  $AF+DF=IF+PI=PF$

＜あまりセンス無い理由＞



AF は (3) の正八角形の一辺の長さと同じなので,

$$AF = \frac{2\sqrt{2}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}(3 - \sqrt{3})}{6} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3}$$

$\triangle PDF$  で,  $\angle DPF=45^\circ$ ,  $\angle DFP=60^\circ$  より,  
 $DP=2$  だから,

$$PF = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad DF = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$AF + DF = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{3} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} = PF$$

#### 【コメント】

私立らしい,  $75^\circ$  が大量に出てくる問題です。見た目で面食らいますが, 角度を丁寧に見ていけば (それが難しいが) 解けるはず。(4) は説明どうすればよいか迷いますね。

#### 【作成】

高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>