

## テクニック文字式関数

範囲：中3関数

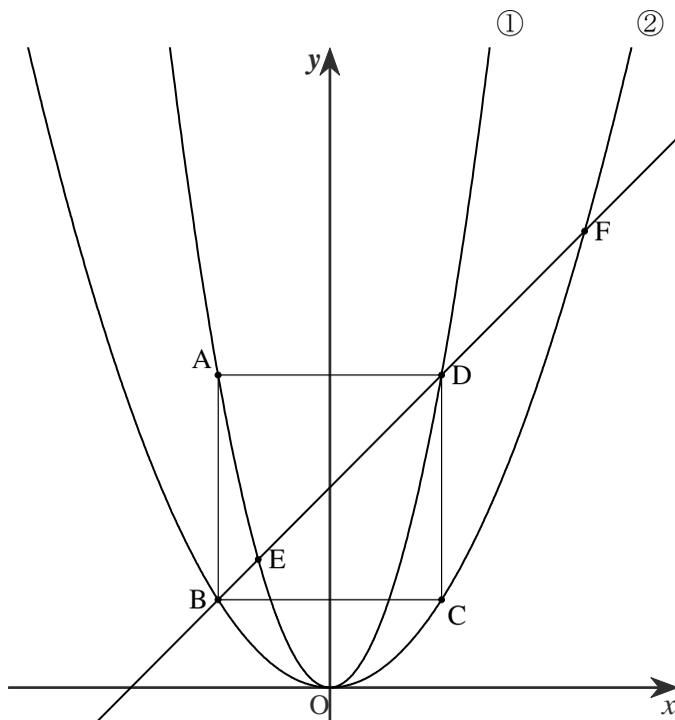
難易度：★★★★★++

得点

/18

出典：2021年度 灘高校

$a$  を正の整数,  $t$  を 2 より大きい定数とする。下の図のように,  $x$  座標が  $-t$  の 2 点  $A, B$  と,  $x$  座標が  $t$  の 2 点  $C, D$  があり, 四角形  $ABCD$  は正方形である。関数  $y = \frac{1}{2}x^2$  のグラフ①は 2 点  $A, D$  を通り, 関数  $y = ax^2$  のグラフ②は, 2 点  $B, C$  を通る。直線  $BD$  とグラフ①の  $D$  以外の交点を  $E$  とおき, 直線  $BD$  とグラフ②の  $B$  以外の交点を  $F$  とおく。



- (1)  $a$  を  $t$  を用いて表せ。
- (2) 点  $E$  の  $x$  座標を  $t$  を用いて表せ。
- (3) 原点を  $O$  とする。△ $OBE$  の面積が△ $OED$  の面積の 2 倍であるとき,  $t$  の値を求めよ。



【解答例】

(1) (5点)

$$AB = \frac{1}{2}t^2 - at^2, \quad BC = 2t \quad \text{で, } AB = BC \text{ より, } \frac{1}{2}t^2 - at^2 = 2t$$

$$a \text{ について解く。} at^2 = \frac{1}{2}t^2 - 2t \quad t \neq 0 \text{ より, } t^2 \text{ で両辺割って, } a = \frac{1}{2} - \frac{2}{t}$$

(2) (5点)

(※1,2) 直線 BD の傾きは 1 であり, 点 D を通るから,

$$BD : y - \frac{1}{2}t^2 = x - t \quad \text{すなわち, } y = x + \frac{1}{2}t^2 - t \quad \text{この式と } y = \frac{1}{2}x^2 \text{ を連立}$$

した方程式を解く。

$$\frac{1}{2}x^2 = x + \frac{1}{2}t^2 - t \quad x^2 - 2x - t^2 + 2t = 0 \quad x^2 - 2x - t(t-2) = 0$$

(※3)  $(x-t)(x+t-2) = 0$   $x = t, -t+2$  よって点 E の  $x$  座標は  $-t+2$

(3) (8点)

$\triangle OBE$  と  $\triangle OED$  の高さが共通なので, 面積比は底辺比となるので, (※4)

点 F と点 B の  $x$  座標の差が, 点 D と点 E の  $x$  座標の差の 2 倍となる。まず, 点 F の  $x$  座標を求める。点 F の  $x$  座標を  $b$  とすると, 例の公式 (※5)

より,  $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{t}\right)(b-t) = 1$   $b$  について解く。両辺に  $2t$  かけて,

$$(t-4)(b-t) = 2t \quad b = \frac{t^2 - 2t}{t-4} \quad \text{よって, 点 F と点 B の } x \text{ 座標の差は,}$$

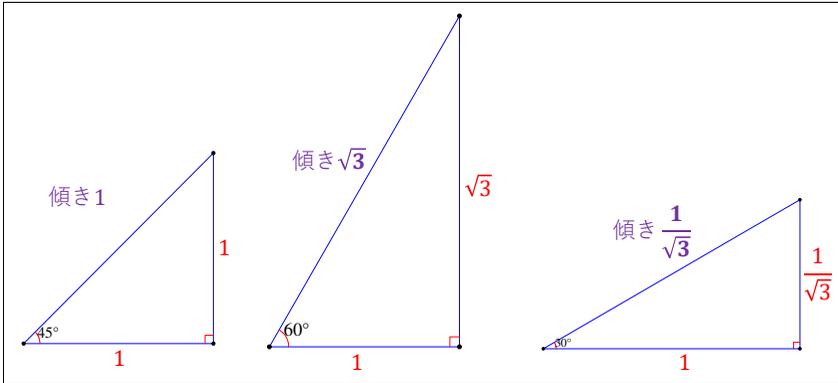
$$\frac{t^2 - 2t}{t-4} + t = \frac{t^2 - 2t + t(t-4)}{t-4} = \frac{2t^2 - 6t}{t-4}$$

点 D と点 E の  $x$  座標の差は,  $t - (-t+2) = 2t-2$  よって,

$$\frac{1}{2} \times \frac{(2t^2 - 6t)}{t-4} = 2t-2 \quad \frac{t^2 - 3t}{t-4} = 2t-2 \quad t^2 - 3t = (t-4)(2t-2)$$

$$t^2 - 3t = 2t^2 - 10t + 8 \quad t^2 - 7t + 8 = 0 \quad t > 2 \text{ より, } t = \frac{7 + \sqrt{17}}{2}$$

(※1) 正方形や正三角形の傾き



本来高校1年生で習うやつだが、有名三角形，中学生でも理解可能。今回，BDは正方形の対角線となるので，傾き1となる。

類題：2020年度開成 <https://hokkaimath.jp/blog-entry-192.html>

(※2) 点 $(p, q)$ を通り，傾き $a$ の直線は， $y - q = a(x - p)$

参考：2021年度宮城県 <https://hokkaimath.jp/blog-entry-222.html>

(※3)

直線BDと $y = \frac{1}{2}x^2$ を連立して，Eのx座標はもちろん，Dのx座標も求める。よって， $x^2 - 2x - t(t - 2)$ を因数分解したとき，Dのx座標が求まる $(x - t)$ が因数に含まれるのは当然である。それを考えると因数分解しやすい。

(※4) x座標の差が辺の長さの比になる理由，こちらへを参照

2017年度北海道：<https://hokkaimath.jp/blog-entry-239.html>

2018年度鳥取県：<https://hokkaimath.jp/blog-entry-164.html>

(※5) 塾とか学校とか教わる裏ワザとか呼ばれるやつ

$$y = cx^2 \text{ 上の点, } A(a, ca^2), B(b, cb^2) \text{ の 2 点を通る直線の式の傾きは,}$$
$$\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = \frac{ca^2 - cb^2}{a - b} = \frac{c(a^2 - b^2)}{a - b} = \frac{c(a + b)(a - b)}{a - b} = c(a + b)$$

比例定数 $\times$ (2点のx座標の和)で求めることが出来る！

直線BDと②を連立しても良いが，それはそれは面倒なことが起こる。

なお、(※5) に関して、灘のこの問題はどれも記述式なので、いきなり例の公式とか書いたら減点されるかもしれない。よって、例の公式の証明を添えておくと良い。

### 【コメント】

滅茶苦茶な高校を受ける人で、かつ関数の問題が得意な中学生が、テクニックを練習するには良い問題かもしれません。大半の中学生には用無しな問題です。ただし、高校に入ったら、これぐらいの計算はできないと困ってしまう！

関数を用いた、面倒計算問題です。関数の知識などを用いて、いかに楽に計算するか、その能力が求められます。正方形の知識、傾き、因数分解、面積比、計算.....。

難易度の上げ方が、The 私立。これさえ解ければ、都立独自作成校はらくちん！？

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>