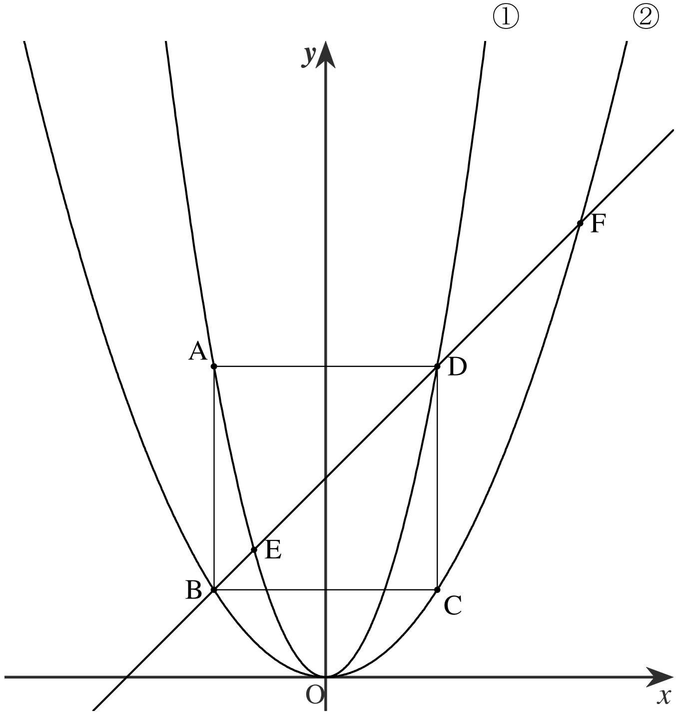
テクニック文字式関数		
範囲：中3関数	難易度：★★★★★++	得点　　　　　/18

出典：2021年度　灘高校

a を正の整数，t を2より大きい定数とする。下の図のように，x 座標が $-t$ の２点A，Bと，x 座標が t の２点C，Dがあり，四角形ABCDは正方形である。関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ①は２点A，Dを通り，関数 $y=ax^2$ のグラフ②は，２点B，Cを通る。直線BDとグラフ①のD以外の交点をEとおき，直線BDとグラフ②のB以外の交点をFとおく。



（1）a を t を用いて表せ。

（2）点Eの x 座標を t を用いて表せ。

（3）原点をOとする。△OBFの面積が△OEDの面積の2倍であるとき，t の値を求めよ。

【解答例】

（1）（5 点）

$\mathrm{AB}=\dfrac{1}{2}t^2-at^2$，$\mathrm{BC}=2t$　で，AB = BC より，$\dfrac{1}{2}t^2-at^2=2t$

aについて解く。$at^2=\dfrac{1}{2}t^2-2t$　$t\neq 0$ より，t^2で両辺割って，$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{t}}$

（2）（5 点）

（※1,2） 直線 BD の傾きは 1 であり，点 D を通るから，

BD：$y-\dfrac{1}{2}t^2=x-t$　すなわち，$y=x+\dfrac{1}{2}t^2-t$　この式と$y=\dfrac{1}{2}x^2$を連立した方程式を解く。

$\dfrac{1}{2}x^2=x+\dfrac{1}{2}t^2-t$　　$x^2-2x-t^2+2t=0$　　$x^2-2x-t(t-2)=0$

（※3） $(x-t)(x+t-2)=0$　$x=t,-t+2$　よって点 E の x 座標は$\boldsymbol{-t+2}$

（3）（8 点）

△OBF と△OED の高さが共通なので，面積比は底辺比となるので，**（※4）** 点 F と点 B の x 座標の差が，点 D と点 E の x 座標の差の 2 倍となる。まず，点 F の x 座標を求める。点 F の x 座標を b とすると，例の公式 **（※5）** より，$\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{t}\right)(b-t)=1$　bについて解く。両辺に $2t$かけて，

$(t-4)(b-t)=2t$　$b=\dfrac{t^2-2t}{t-4}$　よって，点 F と点 B のx座標の差は，

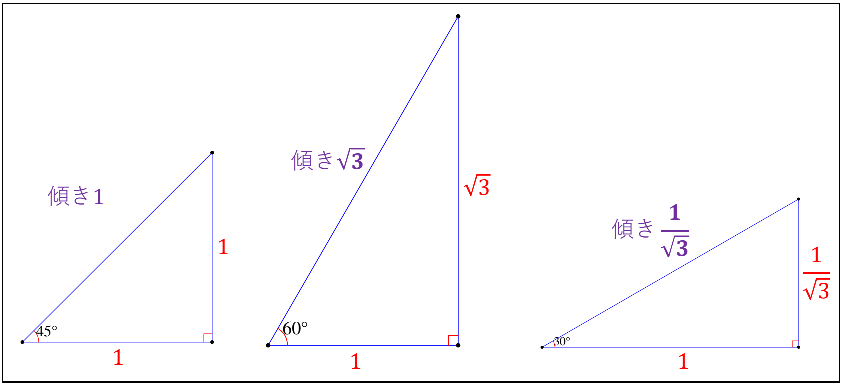
$$\frac{t^2-2t}{t-4}+t=\frac{t^2-2t+t(t-4)}{t-4}=\frac{2t^2-6t}{t-4}$$

点 D と点 E の x 座標の差は，$t-(-t+2)=2t-2$　よって，

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(2t^2-6t)}{t-4}=2t-2$　　$\dfrac{t^2-3t}{t-4}=2t-2$　　$t^2-3t=(t-4)(2t-2)$

$t^2-3t=2t^2-10t+8$　　$t^2-7t+8=0$　　$t>2$ より，$\boldsymbol{t=\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}}$

（※1）正方形や正三角形の傾き



本来高校 1 年生で習うやつだが，有名三角形，中学生でも理解可能。今回，BD は正方形の対角線となるので，傾き 1 となる。

類題：2020 年度開成　https://hokkaimath.jp/blog-entry-192.html

（※2）点(p,q)を通り，傾きaの直線は，$y-q=a(x-p)$

参考：2021 年度宮城県　https://hokkaimath.jp/blog-entry-222.html

（※3）

直線 BD と$y=\dfrac{1}{2}x^2$を連立して，E のx座標はもちろん，D のx座標も求まる。よって，$x^2-2x-t(t-2)$を因数分解したとき，D の x 座標が求まる$(x-t)$が因数に含まれるのは当然である。それを考えると因数分解しやすい。

（※4）x 座標の差が辺の長さの比になる理由，ここらへんを参照

2017 年度北海道：https://hokkaimath.jp/blog-entry-239.html

2018 年度鳥取県：https://hokkaimath.jp/blog-entry-164.html

（※5）塾とか学校とか教わる裏ワザとか呼ばれるやつ

> $y=cx^2$上の点，$\mathrm{A}\left(a,ca^2\right)$，$\mathrm{B}\left(b,cb^2\right)$の 2 点を通る直線の式の傾きは，
>
> $$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\frac{ca^2-cb^2}{a-b}=\frac{c\left(a^2-b^2\right)}{a-b}=\frac{c(a+b)(a-b)}{a-b}=c(a+b)$$
>
> 比例定数×（2 点の x 座標の和）で求めることが出来る！

直線 BD と②を連立しても良いが，それはそれは面倒なことが起こる。

なお，（**※5**）に関して，灘のこの問題はどれも記述式なので，いきなり例の公式とか書いたら減点されるかもしれない。よって，例の公式の証明を添えておくと良い。

【コメント】

滅茶苦茶な高校を受ける人で，かつ関数の問題が得意な中学生が，テクニックを練習するには良い問題かもしれません。大半の中学生には用無しな問題です。ただし，高校に入ったら，これぐらいの計算はできないと困ってしまう！

関数を用いた，面倒計算問題です。関数の知識などを用いて，いかに楽に計算するか，その能力が求められます。正方形の知識，傾き，因数分解，面積比，計算……。

難易度の上げ方が，The 私立。これさえ解ければ，都立独自作成校はらくちん！？

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/