

テクニック文字式関数

範囲：中 3 関数

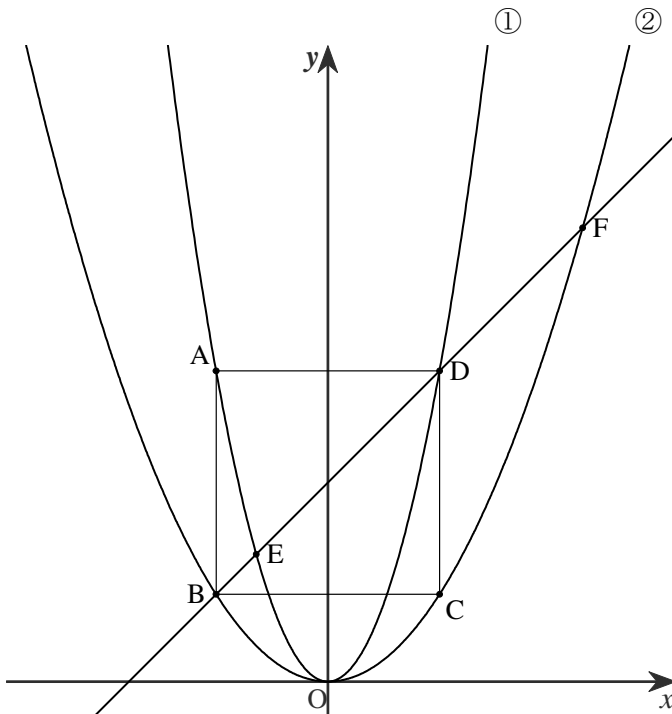
難易度：★×7

得点

/18

出典：2021 年度 灘高校

a を正の定数, t を 2 より大きい定数とする。下の図のように, x 座標が $-t$ の 2 点 A, B と, x 座標が t の 2 点 C, D があり, 四角形 ABCD は正方形である。関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ①は 2 点 A, D を通り, 関数 $y = ax^2$ のグラフ②は, 2 点 B, C を通る。直線 BD とグラフ①の D 以外の交点を E とおき, 直線 BD とグラフ②の B 以外の交点を F とおく。



- (1) a を t を用いて表せ。
- (2) 点 E の x 座標を t を用いて表せ。
- (3) 原点を O とする。△OBF の面積が△OED の面積の 2 倍であるとき, t の値を求めよ。

【解答例】**(1) (5 点)**

$$AB = \frac{1}{2}t^2 - at^2, \quad BC = 2t \quad \text{で, } AB = BC \text{ より, } \frac{1}{2}t^2 - at^2 = 2t$$

$$a \text{ について解く。} at^2 = \frac{1}{2}t^2 - 2t \quad t \neq 0 \text{ より, } t^2 \text{ で両辺割って, } a = \frac{1}{2} - \frac{2}{t}$$

(2) (5 点)

(※1,2) 直線 BD の傾きは 1 であり, 点 D を通るから,

$$BD : y - \frac{1}{2}t^2 = x - t \quad \text{すなわち, } y = x + \frac{1}{2}t^2 - t \quad \text{この式と } y = \frac{1}{2}x^2 \text{ を連立}$$

した方程式を解く。

$$\frac{1}{2}x^2 = x + \frac{1}{2}t^2 - t \quad x^2 - 2x - t^2 + 2t = 0 \quad x^2 - 2x - t(t-2) = 0$$

$$(※3) (x-t)(x+t-2) = 0 \quad x = t, -t+2 \quad \text{よって点 E の } x \text{ 座標は } -t+2$$

(3) (8 点)

$\triangle OBF$ と $\triangle OED$ の高さが共通なので, 面積比は底辺比となるので, (※4)

点 F と点 B の x 座標の差が, 点 D と点 E の x 座標の差の 2 倍となる。

点 B, E, D の x 座標がそれぞれ $-t$, $-t+2$, t なので, 点 D と点 E の x 座標の差は $2t-2$, 点 F の x 座標は $-t+2(2t-2)=3t-4$

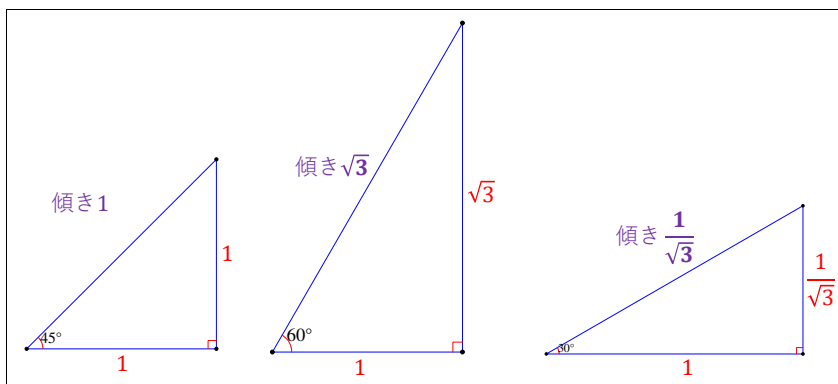
F $(3t-4, a(3t-4)^2)$ となる。直線 BF の傾きは 1 なので,

$$\frac{a(3t-4)^2 - at^2}{3t-4+t} = \frac{a(3t-4+t)(3t-4-t)}{3t-4+t} = a(2t-4) = 1 \quad (※5)$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{t}\right)(2t-4) = 1, \quad (t-4)(2t-4) = 2t, \quad \text{整理して, } 2t^2 - 14t + 16 = 0$$

$$t^2 - 7t + 8 = 0 \quad t > 2 \text{ より, } t = \frac{7 + \sqrt{17}}{2}$$

(※1) 正方形や正三角形の傾き



本来高校 1 年生で習うやつだが、有名三角形，中学生でも理解可能。今回，BD は正方形の対角線となるので，傾き 1 となる。

類題：2020 年度開成 <https://hokkaimath.jp/blog-entry-192.html>

(※2) 点 (p, q) を通り，傾き a の直線は， $y - q = a(x - p)$

参考：2021 年度宮城県 <https://hokkaimath.jp/blog-entry-222.html>

(※3)

直線 BD と $y = \frac{1}{2}x^2$ を連立して，E の x 座標はもちろん，D の x 座標も求ま

る。よって， $x^2 - 2x - t(t - 2)$ を因数分解したとき，D の x 座標が求まる $(x - t)$ が因数に含まれるのは当然である。それを考えると因数分解しやすい。

(※4) x 座標の差が辺の長さの比になる理由，こころへんを参照

2017 年度北海道：<https://hokkaimath.jp/blog-entry-239.html>

2018 年度鳥取県：<https://hokkaimath.jp/blog-entry-164.html>

(※5) 塾とか学校とか教わる裏ワザとか呼ばれるやつを思い出す

$y = cx^2$ 上の点， $A(a, ca^2)$ ， $B(b, cb^2)$ の 2 点を通る直線の式の傾きは，
$$\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = \frac{ca^2 - cb^2}{a - b} = \frac{c(a^2 - b^2)}{a - b} = \frac{c(a + b)(a - b)}{a - b} = c(a + b)$$

比例定数 $\times$ (2 点の x 座標の和) で求めることが出来る！

【コメント】

滅茶苦茶な高校を受ける人で、かつ関数の問題が得意な中学生が、テクニックを練習するには良い問題かもしれません。大半の中学生には用無しな問題です。ただし、高校に入ったら、これぐらいの計算はできないと困ってしまう！

関数を用いた、面倒計算問題です。関数の知識などを用いて、いかに楽に計算するか、その能力が求められます。正方形の知識、傾き、因数分解、面積比、計算.....。

難易度の上げ方が、The 私立。これさえ解ければ、都立独自作成校はらくちん！？

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>