

フェブフェブがエイブ

範囲：文字式	難易度：★×5	得点	/6+3
--------	---------	----	------

出典：2019年度 三重県

下の図1のように、1を3個並べ、それぞれの間にかかーいずれかの記号を入れて式をつくり、計算をすると、計算の結果は、3, 1, -1という異なる3つの値のいずれかになる。図2のように、自然数 a を n 個並べ、それぞれの間にかかーいずれかの記号を入れて式をつくり、計算をする。このとき、次の各問いに答えなさい。

図1

図2

$1 + 1 + 1 = 3$ $1 + 1 - 1 = 1$ $1 - 1 + 1 = 1$ $1 - 1 - 1 = -1$	$\overbrace{a + a + \dots + a + a}^{n \text{ 個}} = \square$ $a - a + \dots + a + a = \square$ \vdots \vdots $a - a - \dots - a + a = \square$ $a - a - \dots - a - a = \square$
---	---

- ① $a=2, n=4$ の場合、できる計算式の結果は、異なる4つの値のいずれかになる。この4つの値をすべて求めなさい。
- ② 計算式の結果の最も大きな値から最も小さな値をひいたときの値を、 a, n を使って表しなさい。
- ③ 計算式の結果の最も大きな値から最も小さな値をひいた値が 50 のとき、自然数 a をすべて求めなさい。

(おまけ)

計算式の結果の、異なるすべての値を、小さい方から順に $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n$ とする。例えば、 $a=1, n=3$ の場合は、 $b_1=-1, b_2=1, b_3=3$ となる。 $b_1+b_2+\dots+b_{n-1}+b_n$ の値を、 a, n を使って表しなさい。

【解答例】**① (2点)**

$2 + 2 + 2 + 2 = 8$	+を1個ずつ-にすればすぐ分かる。 8, 4, 0, -4
$2 + 2 + 2 - 2 = 4$	
$2 + 2 - 2 - 2 = 0$	
$2 - 2 - 2 - 2 = -4$	

② (2点)

最も大きい値 $a + a + \dots + a + a = na$

最も小さい値 $a - a - \dots - a - a = a - (n-1)a = 2a - na$

(a を1回足して、 $n-1$ 個の a を引いている)

$$na - (2a - na) = \mathbf{2na - 2a}$$

③ (2点)

$$2na - 2a = 2a(n-1) = 50, \quad a(n-1) = 25$$

$$25 = 1 \times 25 = 5^2 = 25 \times 1$$

$$a = 1(n=26), \quad a = 5(n=6), \quad a = 25(n=2) \text{となる。} \quad \mathbf{a = 1, 5, 25}$$

(おまけ) (3点)

$$b_n = na - 0a$$

$$b_{n-1} = (n-1)a - a$$

$$b_{n-2} = (n-2)a - 2a$$

⋮

$$b_2 = 2a - (n-2)a$$

$$b_1 = a - (n-1)a$$

$$\begin{aligned} & b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n \\ &= a - (n-1)a + 2a - (n-2)a + \\ & \quad \dots + (n-1)a - a + na \\ &= \mathbf{na} \end{aligned}$$

【コメント】

③までじゃつまらないのでおまけ追加しておきました。びっくりな答え。一瞬面くらいますが、よくよく見たら、よく見る問題ですね。