教育的で話長い内接円		
範囲：平面図形	難易度：★★★★☆	得点　　　　/9

出典：2021 年度　広島県　大問 6

中学生の航平さんは，「三角形の 3 つの辺に接する円の作図」について，高校生のお兄さんの啓太さんと話をしています。

航平「数学の授業で，先生から，これまで学習したことを用いると，三角形の 3 つの辺に接する円を作図できると聞いたんだけど，どうやったら作図できるんだろう。」

啓太「①角の二等分線の作図と②垂線の作図の方法を知っていれば，その円を作図できるよ。」

航平「その 2 つの方法は習ったし，角の二等分線の作図の方法が正しいことも証明したよ。」

啓太「そうなんだね。実は，三角形の 2 つの角の二等分線の交点が，その円の中心になるんだよ。三角形の 3 つの辺に接する円の作図には，いろいろな図形の性質が用いられているから，作図をする際には振り返るといいよ。」

次の（1）～（3）に答えなさい。

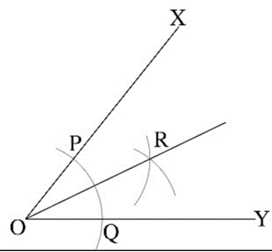
（1）下線部①について，航平さんは，下の【角の二等分線の作図の方法】を振り返りました。

【角の二等分線の作図の方法】

[1]点 O を中心とする円をかき，半直線 OX，OY との交点を，それぞれ P，Q とする。

[2]2 点 P，Q を，それぞれ中心として，同じ半径の円をかき，その交点の 1 つを R とする。

[3]半直線 OR を引く。



【角の二等分線の作図の方法】において，作図した半直線 OR が∠XOY の二等分線であることを，三角形の合同条件を利用して証明しなさい。

(2) 下線部②について, 航平さんは, 右下の図の△ABC において, ∠ABC, ∠ACB の二等分線をそれぞれ引き, その交点を I としました。そして, 下の【手順】によって点 I から辺 BC に垂線を引きました。

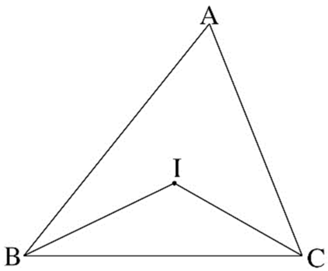
【手順】

[1] $\boxed{\text{ア}}$ を中心として, $\boxed{\text{イ}}$ を半径とする円をかく。

[2] $\boxed{\text{ウ}}$ を中心として, $\boxed{\text{エ}}$ を半径とする円をかく。

[3][1], [2]でかいた円の交点のうち, I ではない方を J とする。

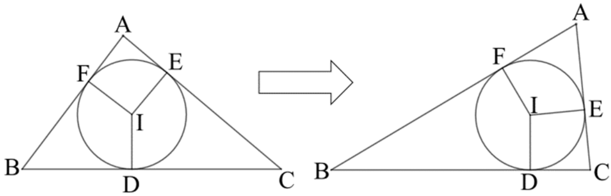
[4]2 点 I, J を通る直線を引く。



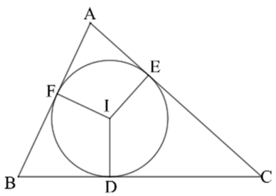
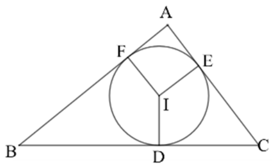
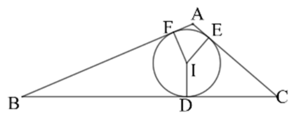
【手順】の $\boxed{\text{ア}}$ ・ $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまる点をそれぞれ答えなさい。また, $\boxed{\text{イ}}$ ・ $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる線分をそれぞれ答えなさい。

航平さんは, 点 I から辺 BC に引いた垂線と辺 BC との交点を D としました。同じようにして, 点 I から辺 CA, AB にも垂線を引き, 辺 CA, AB との交点をそれぞれ E, F としました。そして, 角の二等分線の性質から ID＝IE＝IF であり, 点 I を中心とし, ID を半径とする円が, 円の接線の性質から△ABC の 3 つの辺に接する円であることが分かりました。

(3) さらに，航平さんは，コンピュータを使って△ABC の 3 つの辺に接する円をかき，下の図のように，辺 BC をそのままにして点 A を動かし，△ABC をいろいろな形の三角形に変え，いつでも成り立ちそうなことがらについて調べました。



航平さんは、下の図のように，∠BAC の大きさを，鋭角，直角、鈍角と変化させたときの△DEF に着目しました。

∠BAC が鋭角のとき	∠BAC が直角のとき	∠BAC が鈍角のとき
		

航平さんは，△ABC がどのような三角形でも，△DEF が鋭角三角形になるのではないだろうかと考え，それがいつでも成り立つことを，下のように説明しました。

【航平さんの説明】

> ∠BAC＝x とするとき，∠FDE を，x を用いて表すと，∠FDE＝$\boxed{\text{　オ　}}$と表せる。これより，∠FDE は，$\boxed{\text{　カ　}}$° より大きく$\boxed{\text{　キ　}}$° より小さいことがいえるから，鋭角である。同じようにして，∠DEF，∠EFD も鋭角である。よって，△ABC がどのような三角形でも，△DEF は鋭角三角形になる。

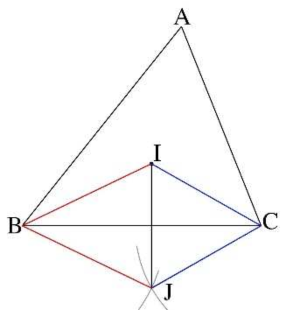
【航平さんの説明】の$\boxed{\text{　オ　}}$に当てはまる式を，x を用いて表しなさい。
また，$\boxed{\text{　カ　}}$・$\boxed{\text{　キ　}}$に当てはまる数をそれぞれ求めなさい。

【解答例】

（1）（4 点）（完答率 13.5%，部分点 16.6%，誤答率 38.2%，他無回答）

△OPR と△OQR において，
仮定より，OP＝OQ　PR=QR
共通な辺だから，OR＝OR
3 組の辺がそれぞれ等しくなるから，△OPR≡△OQR
したがって，∠POR＝∠QOR だから，半直線 OR は∠XOY の二等分線である

（2）（2 点）（正答率 42.0%）



ア　**B**　イ　**BI**　ウ　**C**　エ　**CI**

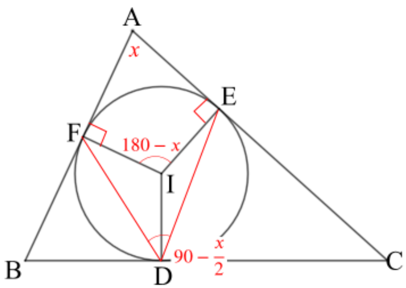
四角形 IBJC が，凧形四角形となる。教科書やワークには必ず載っている垂線作図方法だが，普通は I から円を描くので，こちらの作図方法は忘れがち。忘れがちな方を無理やり穴埋めで出題している，~~ちょっと性格悪い~~。

凧形四角形の問題の例：

2010 年度　北海道　https://hokkaimath.jp/blog-entry-126.html

当ブログの予想問題　大問 4　https://hokkaimath.jp/blog-entry-204.html

（3）（3 点）（完答率 1.0%，部分点 2.2%，誤答率 83.2%，他無回答）



まず，AB，AC は接線なので，∠AFI＝∠AEI＝90°となる（これを知らなかったとしても，（2）を読めばこれらの角が 90°と分かる）。

よって，∠FIE＝180−x となる。

∠FDE は弧 FE に対する円周角だから，∠FIE の半分の大きさになるので，

$\angle\mathrm{FDE}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{FIE}=\mathbf{90^\circ-\frac{x}{2}}$（オ）　となる。

$0<x<180$ なので，

$x=0$ のとき，$\angle\mathrm{FDE}=90^\circ$　　$x=180$ のとき，$\angle\mathrm{FDE}=0^\circ$

となるから，$\angle\mathrm{FDE}$ は，**0°**　（カ）より大きく **90°**　（キ）より小さい。

【コメント】

問題自体，聞いていることは基本的で良いことなのですが，会話文が気に食わない（絶対兄弟であんな会話しない，というか会話文は問題を解く上で不要）。

（1）は，教科書やワークに必ず乗っている問題です。が，受験に効率を求めすぎると，2 等分線の作図は誰でも知っているのに，この証明は忘れがち。問題自体は良い問題。

（2）はう～ん，普通に穴埋めじゃなくて，作図問題として出せばよかったのに。恐らく，忘れがちな方の垂線作図方法を何とかして問いたかったんでしょうが，何か嫌な問題。

（3）は正答率不思議ですね。最後の問題だし，広島のやたら長い文章（大問 2～5）で疲弊してそもそも解いた人が少なさそう。問題自体は良い問題です。$\angle\mathrm{BAC}=x$ と文字で置かれてしまったので，そこで混乱する中学生多そうですね。中学生には厳しい問題（高校生以上には楽勝）。この問題を解く上で必要な知識は，円周角が中心角の半分であるということだけです。たぶん無駄に長い文章のせいで，中学生にとって見かけ以上の難易度になっていると思われる。後，この年は例のアレで授業進度が遅れていたので，そもそも三平方や円周角の問題をそんなに解いていない，ということも正答率低下につながっている気がする。例年通り三平方＋円周角を演習していれば，見慣れた内接円となるので，もうちょっと正答率高くなったかも。

内接円自体詳しいことは，また高校でやるので，高校への架け橋として良い問題なのに，本当，出題方法が気に食わない。他都道府県なら文章量 80%cut する。

【作成】高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/