大学入試風な整数問題		
範囲：整数問題	難易度：★★★★★++	得点　　　/25

出典：2021 年度　都立西高校

先生が数学の授業で次の【課題】を出した。この【課題】について考えている【太郎さんと花子さんの会話】を読んで，あとの各問に答えよ。

【課題】

3 以上の自然数 N を，2 つの自然数 x，y の和で，$N=x+y$ と表す。ただし，$x>y$ とする。さらに，x と y の積 xy を考える。このとき，積 xy が 2 つの自然数 m，n の平方の差で，$xy=m^2-n^2$ と表すことができるのは N がどのような場合か考えよ。

【太郎さんと花子さんの会話】

太郎：まずは N に具体的な数を当てはめて考えてみよう。$N=8$ としたらどうかな。

花子：8 は $7+1$ か $6+2$ か $5+3$ だから，$N=8$ のとき x と y の積 xy は 3 組あるね。

太郎：$7\times1=4^2-3^2$，$6\times2=4^2-2^2$，$5\times3=4^2-1^2$ だから，$N=8$ とすると積 xy は，必ず自然数の平方の差で表すことができるね。$N=7$ とするとどうかな。

花子：(1)積 xy は，必ずしも自然数の平方の差で表せるとは限らないね。

太郎：N としてもっと大きな数でいくつか考えてみようか。$N=2020$ や $N=2021$ の場合はどうかな。

花子：大きな数だからすぐには分からないけど，積 xy を自然数の平方の差で必ず表すためには N に何か条件が必要だと思う。

太郎：そうか，分かった。(2)N が偶数のときには，積 xy は必ず自然数の平方の差で表すことができるよ。

花子：$N=x+y$ だから，2 つの数 x，y がともに偶数なら N は偶数だね。

太郎：そうだね。ちなみに，2 つの数 x，y について【表】で示される関係があるよ。ア～オには偶数か奇数のどちらかが必ず入るよ。【表】

	x，y ともに偶数	x，y ともに奇数	x，y どちらかが偶数でもう一方が奇数
$x+y$	偶数	ア	イ
$x-y$	ウ	エ	オ

花子：なるほどね。じゃあ，$N=2021$ の場合は，積 xy は自然数の平方の差で必ずしも表せるとは限らないということかな。

太郎：そうだね。例えば，$2021=x+y$ として，$x=2019$，$y=2$ のときは，積 xy は自然数の平方の差で表せないけど，(3)$x=1984$，$y=37$ のときは，積 xy は自然数の平方の差で表すことができるよ。

問 1　(1)積 xy は, 必ずしも自然数の平方の差で表せるとは限らないね。とあるが，$N=7$ の場合，自然数の平方の差で表すことができる（x，y）の組は 1 組である。このとき x と y の積 xy を求めよ。

問 2　(2)N が偶数のときには，積 xy は必ず自然数の平方の差で表すことができるよ。が正しい理由を文字 N，x，y，m，n を用いて説明せよ。ただし，**【表】**のア～オに偶数か奇数を当てはめた結果については証明せずに用いてよい。

問 3　(3) $x = 1984$，$y = 37$ のときは，積 xy は自然数の平方の差で表すことができるよ。とあるが，$1984 \times 37 = m^2-n^2$ を満たす自然数（m，n）の組は何組あるか。

【解答例】

問 1（7 点）

N=7 のとき，6+1（積 6），5+2（積 10），4+3（積 12）で，このうち平方の差で表すことができるのは，12 のみ。 **12**

問 2（10 点）

Point m，n が自然数となる条件を考える！

$xy=m^2-n^2$ より，$xy=(m+n)(m-n)$

$x>y>0$ であるから $xy>0$　また，m，n は自然数なので，$m+n>m-n>0$

よって，$x=m+n$，$y=m-n$ となる。

$x+y=2m$，$x-y=2n$ であるから，

m，n が自然数のとき，$x+y$，$x-y$ が偶数となる。このとき【表】より，x，y はどちらも偶数，または奇数となるから，$N=x+y$ より，N は偶数となる。

問 3（8 点）

k	l
・	2
・	2^2
・	2^3
・	2^4
・	31
・	37
・	2×31
・	2×37
・	$2^2\times31$
・	$2^2\times37$

$1984\times37=m^2-n^2=(m+n)(m-n)$

$1984\times37=2^6\times31\times37$　※偶数である

問 2 より，$m+n$ と $m-n$ の偶奇は一致している必要があるので，

$m+n=2\times k$，$m-n=2\times l$ と表せる。

k，l に，残り $2^4\times31\times37$ を振りわけていく。

$m+n>m-n$ であるから，l の値は左の 10 通り。

したがって，$1984\times37 = m^2-n^2$ を満たす自然数（m，n）の組は

10 通り

【表】

	x，y ともに偶数	x，y ともに奇数	x，y どちらかが偶数でもう一方が奇数
$x+y$	**偶数**	**偶数**	**奇数**
$x-y$	**偶数**	**偶数**	**奇数**

【コメント】

大学入試ですか？と思わず突っ込みたくなる問題です。大問が 4 つあって，大問 1 に 10 分使うとしたら，大体 16～17 分！？無理じゃね！？

問 2，中学生にはかなり厳しい記述問題だと思われます。$x>y>0$，だから～とか書けないと思われます。塾で特殊な訓練が必要ですね。学習塾が儲かります。

問 3，何ですかこれ，センター試験（共通テスト）ですか？$\boxed{\text{アイ}}$通りあるとかって出題されてそう。

こういう整数問題は都立西独自ですね。日比谷が空間図形で，都立西が整数。何かこだわりでもあるのでしょうか。

【作成】高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/