

肉うどん

範囲：関数

難易度：★×5

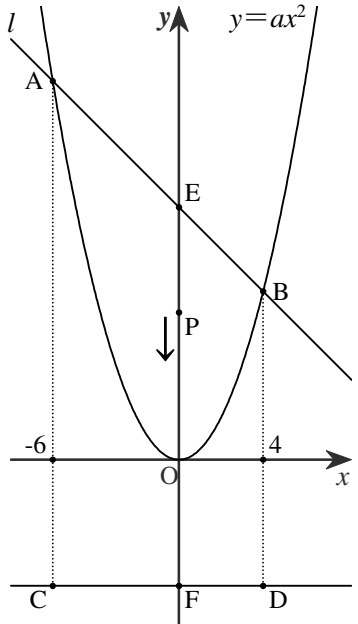
得点

/20

出典：2022年度 福井県

右の図のように、関数 $y=ax^2$ (a は正の定数) のグラフ上に 2 点 A, B がある。 A, B の x 座標はそれぞれ $-6, 4$ である。また、直線 $y=-6$ 上に 2 点 C, D があり、 C, D の x 座標はそれぞれ $-6, 4$ である。直線 l は 2 点 A, B を通り、傾きは -1 である。直線 l と y 軸の交点を E 、直線 $y=-6$ と y 軸との交点を F とする。

点 P は点 E を出発して y 軸上を図中の矢印の方向に毎秒 1 cm の速さで動き続ける。ただし、点 P が点 E を出発してから時間を t 秒、原点 O から点 $(1, 0)$ および $(0, 1)$ までの距離をいずれも 1 cm とする。このとき、次の問いに答えよ。



- (1) a の値を求めよ。
- (2) 直線 l の式を求めよ。
- (3) 点 P が線分 EF 上にあるとき、次の問いに答えよ。
 - ア $\triangle PBA$ の面積を t を用いて表せ。
 - イ $\triangle PBA$ と $\triangle PCD$ の面積の和は、 t の値に関係なく常に一定であることを言葉や数、式などを使って説明せよ。
- (4) $\triangle PBA$ と $\triangle PCD$ の面積の比が $4 : 1$ となるのは、点 P が点 E を出発してから何秒後か、すべて求めよ。

【解答例】**(1) (3点)**

A (-6, 36a) B (4, 16a) なので,

$$\frac{36a - 16a}{-6 - 4} = -2a = -1, \quad a = \frac{1}{2}$$

※または, $y = ax^2$ の 2 点 (p, ap^2) , (q, aq^2) において,

$$\text{傾き} = \frac{ap^2 - aq^2}{p - q} = \frac{a(p + q)(p - q)}{p - q} = a(p + q) \quad \text{これを使って,}$$

$$a(-6 + 4) = -1, \quad a = \frac{1}{2}$$

(2) (3点)A (-6, 18) を通り傾き -1 なので, $y = -x + 12$ **(3) (ア) (4点)**

$$EP = t, \quad \triangle PBA = \triangle PEA + \triangle PEB = \frac{1}{2} \times t \times (6 + 4) = 5t$$

(3) (イ) (6点)

$$\triangle PBA = 5t, \quad \triangle PCD = \frac{1}{2} \times 10 \times (18 - t) = 90 - 5t$$

$\triangle PBA + \triangle PCD = 5t + 90 - 5t = 90$ となり, t の値に関係なく常に一定である。

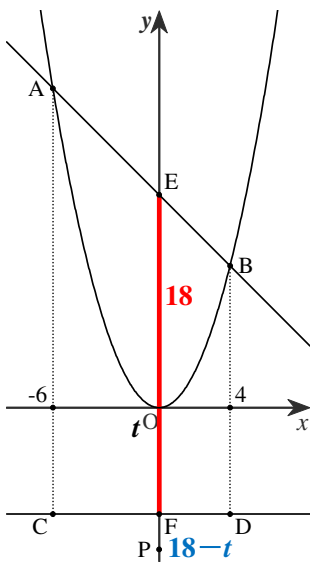
(4) (4点)**I) 点 P が線分 EF 上にあるとき ($0 \leq t \leq 18$)**

$$5t : (90 - 5t) = 4 : 1, \quad 360 - 20t = 5t, \quad 25t = 360, \quad t = \frac{72}{5}$$

II) $18 \leq t$ のとき,

$$\triangle PBA = 5t, \quad \triangle PCD = \frac{1}{2} \times 10 \times (t - 18) = 5t - 90$$

$$5t : (5t - 90) = 4 : 1, \quad 20t - 360 = 5t, \quad 15t = 360, \quad t = 24$$



【コメント】

福井県は場合分けが好きみたいですね、前も見た気がします。

計算・考え方自体はとても簡単なのですが、(4)の最後でミスする人間多かったでしょうね。福井県なら過去問対策で何とかなる受験生も多かったのかな？

【作成】

高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>