難関私立の高校受験問題		
範囲：小問集合	難易度：★★★★★+	得点　　　　/25

出典：2021 年度　西大和学園高校（高校受験）

次の各問いに答えよ。

（1）x の 2 次方程式 $x^2-3x-5=0$ の 2 つの解を a，b とする。
このとき，$a^2+b^2-3a-3b+1$ の値を求めよ。

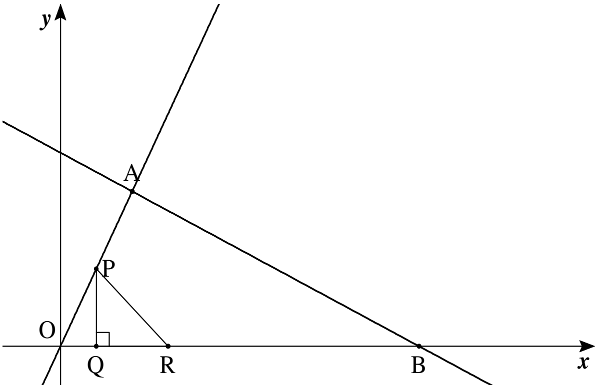
（2）x，y についての連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{2y}=2 \\ \dfrac{8}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{10}{3} \end{cases}$$

を解け。

（3）大，中，小 3 個のさいころを同時に投げる。大のさいころの目を a，中のさいころの目を b，小のさいころの目を c とし，a を百の位，b を十の位，c を一の位としてできた 3 けたの数を X とする。X が 6 の倍数でない確率を求めよ。

(4) 下の図のように，直線 $y=-\frac{1}{2}x+5$ と直線 $y=2x$ との交点を A，x 軸との交点を B とする。点 P は，O を出発し，直線 $y=2x$ のグラフ上を O から A まで動き，次に直線 $y=-\frac{1}{2}x+5$ のグラフ上を A から B まで動く。P から x 軸に引いた垂線と x 軸との交点を Q とし，PQ＝QR となる点 R を，x 軸上に Q の右側にとる。△ORP の面積が 9 となる P の x 座標をすべて求めよ。



(5) a は 50 以下の素数とする。$\sqrt{a}$の整数部分を b とし，小数部分を c とするとき，$\left(\sqrt{a}+b\right)c=4$が成り立つ。この式をみたす a の値をすべて求めよ。ただし，ある正の数 x に対して，$n \leqq x \leqq n+1$ をみたす整数 n を x の整数部分といい，$x-n$ を x の小数部分という。

【解答例】

(1) 中学生難易度：★★★★★　高校生難易度：★☆☆☆☆

$x^2-3x-5=0$の 2 つの解が a, b なので,

$x^2-3x-5=(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$

係数を比較し, $a+b=3$, $ab=-5$

$a^2+b^2-3a-3b+1=(a+b)^2-2ab-3(a+b)+1=9+10-9+1=$ **11**

【コメント 1】

解と係数の関係を使う問題。どう考えても本来は高校範囲。私立だから仕方ないか。高校生には余裕な問題（北海道の高校生は 7 割解けない）。一部の塾用ワークには載っていたりする。公立入試では出せない問題。

解と係数の関係　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ において,

解が α,β であるとき, $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$と因数分解できる。

$a(x-\alpha)(x-\beta)=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta$ であるから, 係数を比較して,

$$\begin{cases} -a(\alpha+\beta)=b & \text{すなわち,} \quad \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} \\ a\alpha\beta=c & \text{すなわち,} \quad \alpha\beta=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

例えば, $x^2-3x-40=0$ を解くとき, $(x-8)(x+5)=0$　$x=8, x=-5$

と解くが, 確かに$8+(-5)=-(-3), 8\times(-5)=-(-40)$となっている。

$x^2-3x-5=0$ の解は, $x=\dfrac{3\pm\sqrt{29}}{2}$ であるが, 上記と同じように計算できる。

$$\underbrace{\frac{3+\sqrt{29}}{2}+\frac{3-\sqrt{29}}{2}=3}_{\alpha+\beta},\ \underbrace{\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)=\frac{1}{4}(9-29)=-5}_{\alpha\beta}$$

（2）中学生難易度：★★★★★　高校生難易度：★★☆☆☆

$$\begin{cases}\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{2y}=2\ldots① \\ \dfrac{8}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{10}{3}\ldots②\end{cases}\quad ①\times2\text{ で}\quad \dfrac{8}{x}+\dfrac{3}{y}=4\ldots③$$

③－①より，$\dfrac{4}{y}=\dfrac{2}{3}$　$4=\dfrac{2}{3}y$　$\boldsymbol{y=6}$　①に代入して，

$\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4}=2$　$\dfrac{4}{x}=\dfrac{7}{4}$　$4=\dfrac{7}{4}x$　$\boldsymbol{x=\dfrac{16}{7}}$

【コメント 2】

　分母に文字が入っているので，中学生はもちろん，大半の高校生（北海道の高校生の 8 割）にとって難しい問題。ただ，札幌市の文教地区ならこれぐらいの問題出されてそう（文教地区の問題あまり見たことないけど），嫌だねー。北海道の入試では出せない問題。

（3）中学生難易度：★★★★★　高校生難易度：★★★☆☆

X が 6 の倍数であるとき，X は 2 の倍数かつ 3 の倍数なので，

①　c が 2 の倍数（c＝2, 4, 6）　②　$a+b+c$ が 3 の倍数

※　2 の倍数の見分け方→1 の位が 2 の倍数

※　3 の倍数の見分け方→各位の数の和が 3 の倍数

I)c＝2 のとき，$a+b$＝4, 7, 10　II)c＝4 のとき，$a+b$＝2, 5, 8, 11

III)c＝6 のとき，$a+b$＝3, 6, 9, 12　a と b の組み合わせは以下の通り。

4	7	10	2	5	8	11	3	6	9	12
1-3 2-2 3-1	1-6 2-5 3-4 4-3 5-2 6-1	4-6 5-5 6-4	1-1	1-4 2-3 3-2 4-1	2-6 3-5 4-4 5-3 6-2	5-6 6-5	1-2 2-1	1-5 2-4 3-3 4-2 5-1	3-6 4-5 5-4 6-3	6-6

合計 36 通りとなる。よって 6 の倍数にならないのは，216－36＝180 通り

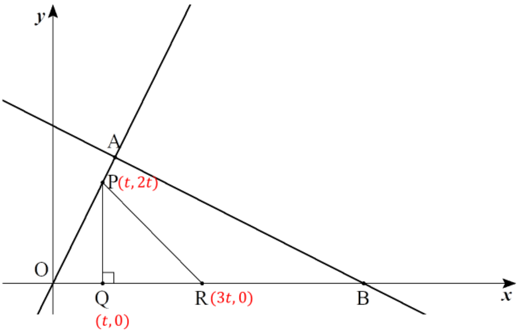
$\dfrac{180}{216}=\boldsymbol{\dfrac{5}{6}}$

【コメント 3】

高校入試のルール違反ではないが，普通に面倒で難しい問題。倍数の見分け方は，中学入試や整数問題，どこかで学んだはず。学んでなくても倍数見分け問題は公立でも平気で出る。

<u>（4）中学生難易度：★★★☆☆　高校生難易度：★★☆☆☆</u>

I)P が OA 上にいるとき



P（t, $2t$）と表すと，

Q（t, 0）QP＝QR だから，

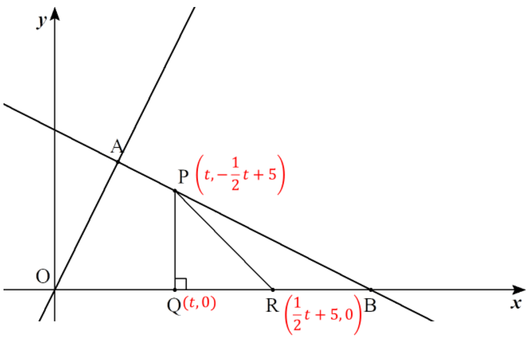
R の x 座標は $t+2=3t$

△OPR

$$=\frac{1}{2}\times 3t\times 2t=3t^2=9$$

$t>0$ より，**$t=\sqrt{3}$**

II)P が AB 上にいるとき



R の x 座標は

$$t+\left(-\frac{1}{2}t+5\right)=\frac{1}{2}t+5$$

△OPR

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t+5\right)\left(-\frac{1}{2}t+5\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(25-\frac{1}{4}t^2\right)=9$$

$t^2=28$　$t>0$ より，**$t=2\sqrt{7}$**

【コメント 4】

5 問の小問集合の中では，最も一般的な問題。よく公立高校の関数の問題で出題されそう。

（5）中学生難易度：★★★★☆　高校生難易度：★★★☆☆

$\sqrt{a}=b+c$より，$\sqrt{a}-b=c$

$$\left(\sqrt{a}+b\right)c=\left(\sqrt{a}+b\right)\left(\sqrt{a}-b\right)=a-b^2$$

$a-b^2=4$ となり，$a=b^2+4$　a は 50 以下の素数で，$\sqrt{a}$の整数部分が b であることに考慮すると，

a	b^2	
5	1	整数部分ではない
8	4	素数じゃない
13	9	○
20	16	素数じゃない
29	25	○
40	36	素数じゃない
53	49	50 超えている

よって求める a は，

a＝**13，29**

【コメント 5】

　数 IA で出てきそうな問題。訓練された中学生なら難なく解けそう。逆に，高校生も気づかなかったら苦戦しそう。

【コメント 6】

　やはり，東大京大に 140 名ぐらい合格者を送り出す高校（中高一貫校）は，小問集合も難しい！高校知識が前提となっている問題が多いです。でもこんなにその知識が前提となっている高校入試問題は，私初めて見ました。もっと色々な高校の問題がみてみたいものです。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/